



UBA
1821 Universidad
de Buenos Aires

.UBAfiuba 
FACULTAD DE INGENIERÍA

TB066
ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Función de Transferencia

Trabajo Práctico Integrador

Alumno

Klöckner, Martin Javier

Corrector

Cea Sastre, Diego Hernán

Correo electrónico

mklockner@fi.uba.ar

Correo electrónico

dceasas@fi.uba.ar

Índice

1	Introducción	3
2	Análisis de transferencia	3
2.1	Polos y ceros	4
2.2	Producto de transferencias más simples	4
2.3	Respuesta al impulso	6
2.4	Respuesta al escalón	9
2.5	Respuesta a señal senoidal	11
3	Circuitos teóricos	15
3.1	Filtro pasa altos de primer orden	15
3.2	Filtro pasa bajos de segundo orden	18
3.3	Amplificador no inversor	20
3.4	Circuito propuesto	21
4	Simulaciones	23
4.1	Respuesta en frecuencia	23
4.2	Respuesta al impulso	24
4.3	Respuesta al escalón	25
4.4	Respuesta a señal senoidal	26
4.5	Respuesta a señal cuadrada	28
5	Implementación del circuito	30
5.1	Diseño	30
5.2	Armado	31
5.3	Mediciones	32
6	Conclusión	37
	Referencias	38

Índice de figuras

1	Respuesta al impulso analítica en dominio temporal	9
2	Respuesta al escalón analítica en dominio temporal	11
3	Respuesta a señal senoidal de 250Hz analítica en dominio temporal . . .	14
4	Circuito pasa altos de primer orden con divisor de impedancias	16
5	Diagrama de Bode de circuito pasa altos, H_1 y H_1 normalizada	17
6	Circuito pasa bajos Sallen-Key	19
7	Diagrama de Bode de circuito pasa bajos Sallen-Key, H_2 y H_2 normalizada	20
8	Circuito amplificador no inversor	20
9	Circuito propuesto con valores normalizados	21
10	Diagrama de Bode de circuito propuesto ideal, H y H normalizada	22
11	Circuito final a simular en LTSpice	23
12	Diagrama de Bode de transferencias y circuito	24
13	Respuesta al impulso transferencia ideal y normalizada	24
14	Fuente utilizada en LTSpice para simular respuesta al escalón	25
15	Respuesta al escalón transferencias y circuito.	25
16	Fuente y directivas de LTSpice para generar señales senoidales	26
17	Respuesta a señal senoidal de 250 Hz transferencias y circuito.	26
18	Respuesta a señal senoidal de 636,6 Hz transferencias y circuito	27
19	Respuesta a señal senoidal de 10 kHz transferencias y circuito	27
20	Fuente y directivas de LTSpice para generar señales cuadradas	28
21	Respuesta a señal cuadrada de 10 Hz transferencias y circuito	28
22	Respuesta a señal cuadrada de 250 Hz transferencias y circuito	29
23	Respuesta a señal cuadrada de 2,5 kHz transferencias y circuito	29
24	Circuito implementado en la placa	30
25	Vistas de la placa modelada	31
26	Vistas de la placa armada	31
27	Diagrama de conexiones para realizar las mediciones sobre la placa . . .	32
28	Respuesta a señales senoidales de la placa	33
29	Respuesta a señales cuadradas de la placa	34
30	Respuesta al escalón de la placa	35
31	Diagrama de Bode de transferencias y placa	36

Índice de tablas

1	Algunos valores obtenidos que minimizan el error de ω_0 y Q	19
2	Errores porcentuales entre la transferencia ideal y normalizada	22
3	Error porcentual entre la ganancia de la transferencia original y la placa .	36

En el presente trabajo se realiza un análisis de la transferencia de un sistema dado y luego se diseña e implementa un circuito que responda acorde a esa transferencia.

1. Introducción

Por definición, la transferencia $H(s)$ de un sistema, es el cociente entre la entrada $X(s)$ y la salida $Y(s)$ del sistema, suponiendo que todas las condiciones iniciales son nulas, específicamente en el dominio de Laplace.¹

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (1)$$

La transferencia sirve para determinar como reacciona el sistema a una determinada entrada $X(s)$, es decir, permite obtener la salida $Y(s)$ para cualquier entrada,² esto porque se trabaja con sistemas lineales invariantes en el tiempo.

2. Análisis de transferencia

La transferencia a analizar tiene la expresión de la ecuación 2.

$$H(s) = \frac{6 \cdot \left(\frac{s}{250} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{500} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{4000^2} + \frac{s}{9000} + 1 \right)} \quad (2)$$

Tomando $s = j\omega$ se tiene la respuesta en frecuencia del sistema, para determinar a que tipo de filtro corresponde, se analiza como actúa la transferencia para frecuencias muy bajas y como actúa para frecuencias muy altas, esto es $\omega \rightarrow 0$ y $\omega \rightarrow \infty$, respectivamente. Para frecuencias muy bajas, con $\omega \rightarrow 0$ en la transferencia resulta como en la ecuación 3.

$$H(\omega \rightarrow 0) = \frac{6 \cdot (\rightarrow 0 + 1)}{(\rightarrow 0 + 1)(\rightarrow 0 + \rightarrow 0 + 1)} = 6 \quad (3)$$

Mientras que para frecuencias muy altas se toma $\omega \rightarrow \infty$, lo que resulta en una indeterminación infinito sobre infinito como se observa en la ecuación 4, aplicando

¹ Sección 16.4 "Funciones de transferencia", Sadiku, 2015

² Sección 2.2 "Sistemas LTI continuos: la integral de convolución", Alan V. Oppenheim, 1997

la regla de L'Hopital y luego evaluando para $\omega \rightarrow \infty$ se llega al resultado de la ecuación 5.

$$H(\omega \rightarrow \infty) = \frac{6 \cdot (\rightarrow \infty + 1)}{(\rightarrow \infty + 1)(\rightarrow \infty + \rightarrow \infty + 1)} = \frac{\rightarrow \infty}{\rightarrow \infty} \quad (4)$$

$$H'(\omega \rightarrow \infty) \Rightarrow 0 \implies H(\omega \rightarrow \infty) \Rightarrow 0 \quad (5)$$

Teniendo en cuenta los resultados de las ecuaciones 3 y 5 se observa que permite el paso a bajas frecuencias, mientras que atenúa por completo frecuencias altas, este comportamiento es el de un filtro **pasa bajos**.

2.1. Polos y ceros

Denotando la transferencia como cociente de polinomios $N(s)$ y $D(s)$ para el numerador y denominador, respectivamente, como se muestra en la ecuación (6), se define *ceros* a las raíces del polinomio del numerador y *polos* a las raíces del polinomio del denominador.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6)$$

Para el polinomio del numerador $N(s)$ se tiene un único cero real en $z_1 = -250$, mientras que para el polinomio del denominador $D(s)$ se tiene un polo real simple en $p_1 = -500$ y un par de polos complejos conjugados $p_{2,3} = -8000/9 \pm j3900$. Se puede observar que todos los polos y ceros tienen parte real negativa, esto implica que el sistema asociado a la transferencia es estable.³

2.2. Producto de transferencias más simples

La expresión de la transferencia de la ecuación (2) se puede reescribir como producto de transferencias más simples, además simplificando el término que acompaña a los coeficientes de mayor grado en los polinomios del numerador y denominador resulta como se muestra en la ecuación (7).

$$H(s) = 12 \frac{(s + 250)}{(s + 500)} \frac{4000^2}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \quad (7)$$

³ Este resultado se obtiene de la sección 16.6.1 "Estabilidad de una red", Sadiku, 2015

En la ecuación (7) se observa un producto de dos transferencias más simples, las cuales resulta conveniente llamar $H_1(s)$ a la transferencia de primer orden y $H_2(s)$ a la de segundo, de manera que $H(s)$ sea el producto de $H_1(s)$, $H_2(s)$ y un factor de ganancia 12 (o 21,6dB aproximadamente) repartido entre ambas transferencias, tal como se muestra en la ecuación (8).

$$H_1(s) = K_1 \frac{(s + 250)}{(s + 500)} \quad H_2(s) = K_2 \frac{4000^2}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)}$$

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s); \quad K_1 \cdot K_2 = 12 \quad (8)$$

Analizando cada transferencia por separado y realizando un análisis análogo al realizado para la expresión de la transferencia completa, se observa que H_1 corresponde a un filtro pasa altos de primer orden, el cual tiene una diferencia de ganancia entre frecuencias altas y bajas de 6dB, ya que evaluando H_1 para frecuencias muy bajas ($\omega \rightarrow 0$) resulta $0,5K_1$ (atenuación en 6dB aproximadamente para $K_1 = 1$) y para frecuencias altas ($\omega \rightarrow \infty$) $H_1(s)$ resulta K_1 . La frecuencia de corte se obtiene cuando el modulo de la transferencia resulta aproximadamente $0,707$ o $-3dB$ con respecto a la banda pasante, por lo que tomando $K_1 = 1$ e igualando el modulo de la respuesta en frecuencia con $1/\sqrt{2}$, como se muestra en la ec. (9), se obtiene una frecuencia de corte ω_c aproximada de 353,5rad/s, esto es aproximadamente 56,3Hz.

$$|H_1(j\omega_c)| = \left| \frac{j\omega_c + 250}{j\omega_c + 500} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c \approx 353,5 \text{ rad/s} \Rightarrow \boxed{f_c \approx 56,3\text{Hz}} \quad (9)$$

Para la transferencia $H_2(s)$ se tiene un filtro pasa-bajos de segundo orden, en este caso se tiene una expresión generalizada de las transferencia, la cual se encuentra en la ecuación (10).⁴

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (10)$$

Tomando la expresión de $H_2(s)$ e igualando con la expresión general de (10), en particular el polinomio en el denominador, resulta como se muestra en la ec. (11).

⁴ Se utiliza la Tabla 5.1 "Standard Forms of Second-Order Responses", Rolf Schaumann, 2001

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2 \Rightarrow \omega_0 = 4000 \text{ rad/s}; Q = 9/4 \quad (11)$$

De (11) igualando terminos a terminos resulta en una frecuencia natural $\omega_0 = 4000$ y un factor de calidad $Q = 9/4 = 2,25$. Este resultado del factor de calidad Q era esperable ya que se sabe que tiene raíces complejas conjugadas, por lo que debía que ser mayor a 0,5 para que esto se cumpla.

2.3. Respuesta al impulso

Como se mencionó previamente, la transferencia de un sistema LTI permite obtener la salida de ese sistema ante cualquier entrada. Despejando la salida $Y(s)$ de la ecuación (1) resulta como en la ec. (12), siendo $X(s)$ la transformada de Laplace de la entrada. Para la respuesta al impulso se tiene como entrada la delta de Dirac, por lo tanto $X(s)$ en este caso es la transformada de Laplace de la delta $\mathcal{L}\{\delta\}$, que por tabla resulta $\mathcal{L}\{\delta\} = 1$,⁶ resultando en la misma expresión en el dominio de Laplace que la transferencia, como se muestra en la ecuación (13).

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (12)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(s)\} = H(s) \cdot 1 = H(s) \quad (13)$$

No es casualidad que la respuesta al impulso sea la transformada de Laplace de la delta, y es que esta es otra definición valida para la función de transferencia. Entonces, para determinar la respuesta al impulso del sistema dado por la transferencia $H(s)$ basta con calcular la anti-transformada de Laplace de la función de transferencia $H(s)$, esto es, la respuesta al impulso $h(t)$ en el dominio de tiempo será $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, como se muestra en la ecuación (14).

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{12 \cdot \frac{(s+250)}{(s+500)} \cdot \frac{4000^2}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)}\right\} \quad (14)$$

Como el operador de Laplace es un operador lineal las constantes multiplicando salen fuera del operador, y factorizando el termino cuadrático del denominador de la transferencia en términos de las raíces, resulta como se muestra en la ec. (15).

⁶ Tabla 15.2, Sadiku, 2015

$$h(t) = 12 \cdot 4000^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s + 250)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3)} \right\} \quad (15)$$

Teniendo la transferencia como producto, resulta conveniente factorizar en fracciones simples, de manera que se pueda aplicar término a término el operador inverso de Laplace, por la propiedad de linealidad.⁷ La expansión en fracciones simples de la expresión a anti-transformar, resulta como se muestra en (16), con $k_{1,2,3}$ números complejos constantes y $p_{1,2,3}$ los polos de la transferencia hallados previamente. Como p_2 y p_3 son complejos conjugados, entonces se cumple que el coeficiente k_3 es el conjugado de k_2 , esto es, $k_3 = k_2^*$.

$$h(t) = 12 \cdot 4000^2 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_1}{(s - p_1)} + \frac{k_2}{(s - p_2)} + \frac{k_3}{(s - p_3)} \right\} \quad (16)$$

Para hallar los coeficientes $k_{1,2}$ se utiliza el método de los residuos teniendo en cuenta que son polos simples, para esto se toma el límite tendiendo al polo p_i correspondiente al coeficiente k_i de la función previa a expandirla en fracciones simples, multiplicada por el término que anula el denominador en ese polo $(s - p_i)$, como se muestra en la ecuación (17)

$$k_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \cdot H(s) \quad (17)$$

Para el primer coeficiente k_1 resulta como se muestra en la ecuación (18), y realizando el mismo procedimiento se obtiene k_2 como se muestra en la ecuación (19). El coeficiente k_3 es el conjugado de k_2 , por lo que el resultado es directo como se muestra en la ecuación (20).

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow -500} (s + 500) \cdot \frac{(s + 250)}{(s + 500)} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000} s + 4000^2 \right)}$$

$k_1 \approx -16,3 \cdot 10^{-6}$

(18)

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow \frac{-8000}{9} + j3900} \frac{\left(s - \left(\frac{-8000}{9} + j3900 \right) \right) \cdot (s + 250)}{(s + 500) \cdot \left(s - \left(\frac{-8000}{9} + j3900 \right) \right) \cdot \left(s - \left(\frac{-8000}{9} - j3900 \right) \right)}$$

$k_2 \approx (8,37 - j129) \cdot 10^{-6}$

(19)

⁷ Esto se conoce como teorema de Heaviside, sección 15.4, Sadiku, 2015

$$k_3 = k_2^* \Rightarrow k_3 \approx (8,37 + j129) \cdot 10^{-6} \quad (20)$$

Teniendo los valores de $k_{1,2,3}$, en la ecuación (16) se puede aplicar el operador inverso de Laplace termino a termino, cada termino responde a expresiones tabuladas,⁸ lo que resulta como se ve en la ecuación (21).

$$h(t) = 12 \cdot 4000^2 \cdot (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + k_3 e^{-p_3 t}) \cdot u(t) \quad (21)$$

En particular en el segundo y tercer termino de (21) los coeficientes $k_{2,3}$ y sus polos $p_{2,3}$ son complejos conjugados, aplicando la identidad de Euler y operando se llega al resultado siguiente que se muestra en (22).

Denotando $p_2 = \alpha + j\beta$ y $k_2 = \lambda + j\gamma$

$$\Rightarrow k_2 e^{-p_2 t} + k_2^* e^{-p_2^* t} = 2e^{\alpha t} \cdot [\lambda \cos(\beta t) + \gamma \sin(\beta t)] \quad (22)$$

Y aplicando propiedades trigonométricas en (22), en particular la igualdad entre la suma de las funciones seno y coseno con fase nula, con una función coseno con fase no nula, resulta como se muestra en la ecuación (23), luego reemplazando con los valores de k_2 y p_2 resulta como en (24).

Siendo $p_2 = \alpha + j\beta$ y $k_2 = \lambda + j\gamma$

$$k_2 e^{-p_2 t} + k_2^* e^{-p_2^* t} = 2 |k_2| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \arg\{k_2^*\}) \quad (23)$$

$$\Rightarrow k_2 e^{-p_2 t} + k_2^* e^{-p_2^* t} = 258,5 \cdot 10^{-6} e^{-889t} \cos(3900t + 1,51) \quad (24)$$

Combinando los resultados de (18) y (24) en (21) se obtiene finalmente la respuesta al impulso en el dominio de tiempo $h(t)$ como se muestra en la ecuación (25).

$$h(t) \approx 12 \cdot 4000^2 \left[16,3 \cdot 10^{-6} e^{-500t} + 258,5 \cdot 10^{-6} e^{-889t} \cos(3900t + 1,51) \right] u(t)$$

$$h(t) \approx \left[3130 \cdot e^{-500t} + 49632 \cdot e^{-889t} \cos(3900t + 1,51) \right] u(t) \quad (25)$$

Para la expresión de la respuesta al impulso de la ecuación (25), se realiza un gráfico en función del tiempo, el cual se muestra en la figura 1, la forma era de esperarse ya que una de las transferencias ($H_2(s)$) tiene raíces complejas conjugadas por lo que su comportamiento es de tipo subamortiguado.

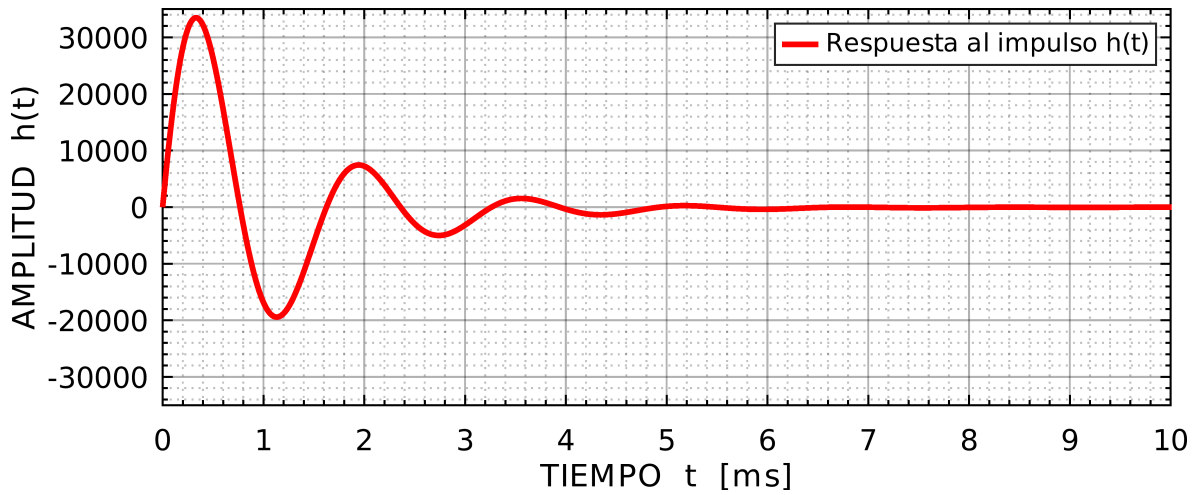


Figura 1: Respuesta al impulso analítica en dominio temporal

2.4. Respuesta al escalón

El procedimiento para calcular la respuesta al escalón es análogo al realizado para calcular la respuesta al impulso, utilizando la ecuación (12) con $X(s)$ la transformada de Laplace de la entrada, en este caso la transformada de Laplace de la función de Heaviside o escalón, esto es $X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, que por tabla⁸ resulta $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$. La expresión de la transformada inversa de Laplace de la respuesta al escalón resulta como se muestra en la ecuación (26) y luego en (27) extrayendo las constantes fuera del operador, por la propiedad de linealidad.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{12 \cdot \frac{(s+250)}{(s+500)} \cdot \frac{4000^2}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{1}{s}\right\} \quad (26)$$

$$= 12 \cdot 4000^2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+250)}{(s+500)} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{1}{s}\right\} \quad (27)$$

Nuevamente se expande en fracciones simples la expresión a anti-transformar para aprovechar la propiedad de linealidad, en este caso al multiplicar la transferencia por la transformada de la función escalón ($1/s$), se agrega un polo en cero, $p_4 = 0$,

⁸ Tabla 15.2, Sadiku, 2015

es por esto que habrá un termino más en la expresión expandida en fracciones simples, a diferencia de la expansión para la respuesta al impulso de la ecuación (16), como se muestra en (28).

$$y(t) = 12 \cdot 4000^2 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \frac{k_3}{(s-p_3)} + \frac{k_4}{(s-p_4)} \right\} \quad (28)$$

Para calcular los coeficientes $k_{1,2,3,4}$ se utiliza la ecuación (17), resultando como se muestra en (29), (30), (31) y (32), respectivamente.

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow -500} \frac{(s+250)}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{k_1 \approx 32,5 \cdot 10^{-9}} \quad (29)$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow \frac{-8000}{9} + j3900} \frac{(s+250)}{(s+500) \cdot \left(s - \left(\frac{-8000}{9} - j3900\right)\right)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\boxed{k_2 \approx (-31,9 + j5,18) \cdot 10^{-9}} \quad (30)$$

$$k_3 = k_2^* \Rightarrow \boxed{k_3 \approx (-31,9 - j5,18) \cdot 10^{-9}} \quad (31)$$

$$k_4 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(s+250)}{(s+500)} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{k_4 \approx 31,3 \cdot 10^{-9}} \quad (32)$$

Teniendo el valor de los coeficientes k_i y aplicando la antitransformada termino a termino resulta como en la ecuación (33).

$$y(t) = 12 \cdot 4000^2 \cdot (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + k_3 e^{-p_3 t} + k_4 e^{-p_4 t}) \cdot u(t) \quad (33)$$

Reutilizando el resultado de la ecuación (23) para términos provenientes de polos complejos conjugados, y sabiendo que $p_4 = 0$, entonces la expresión de la respuesta al escalón del sistema en dominio temporal $y(t)$, resulta como se muestra en la ecuación (34).

$$y(t) \approx 12 \cdot 4000^2 \cdot 10^{-9} \left[32,5 \cdot e^{-500t} + 64,6 \cdot e^{-889t} \cos(3900t + 2,98) + 31,3 \right] u(t)$$

$$\boxed{y(t) \approx \left[6,24 \cdot e^{-500t} + 12,41 \cdot e^{-889t} \cos(3900t + 2,98) + 6,01 \right] u(t)} \quad (34)$$

Para el resultado de la respuesta al escalón en dominio temporal $y(t)$ de la ecuación (34), se realizó un gráfico en función del tiempo, el cual se muestra en la figura 2.

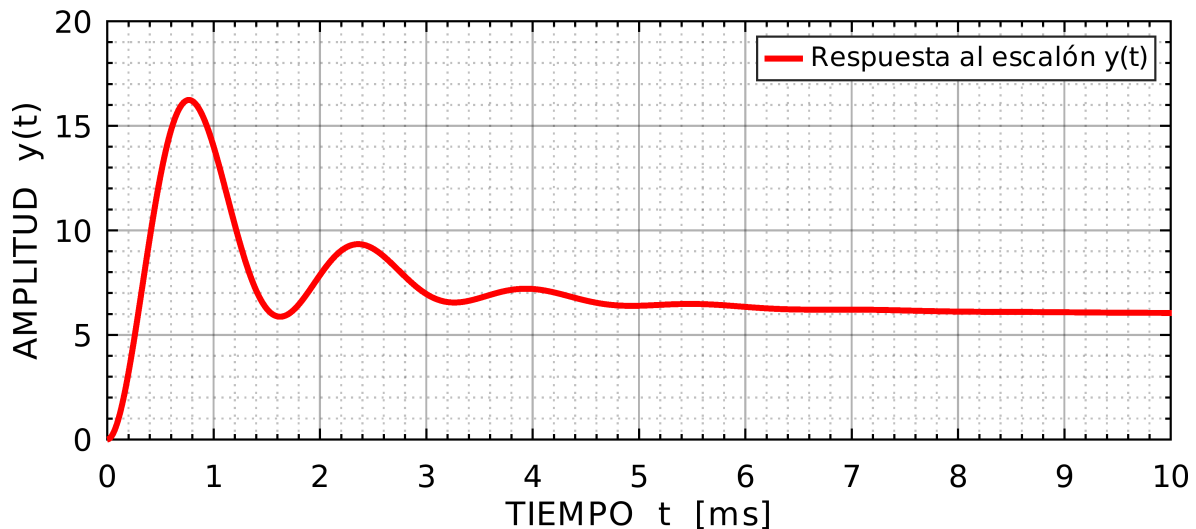


Figura 2: Respuesta al escalón analítica en dominio temporal

En la figura 2 se observa que para frecuencias altas, esto es en la transición en el origen de la función escalón, se comporta similar a la respuesta al impulso, presentando oscilaciones hasta que el sistema se estabiliza. De la ecuación (34) se observa que el transitorio mas lento es el de la exponencial $e^{-889 \cdot t}$ el cual tiene un tiempo característico $\tau = 2\text{ms}$; por convención se toma 5 veces ese valor, resultando en 10ms de tiempo para que el sistema se estabilice por completo, lo cual se ve claramente en la figura. Cuando la función escalón es continua y el sistema se estabiliza se observa la ganancia de 6 (o $15,56\text{dB}$ aproximadamente) propia de la transferencia $H(s)$ para frecuencias bajas, obtenido en la ecuación (3).

2.5. Respuesta a señal senoidal

Para la respuesta a una señal senoidal se realiza un procedimiento análogo a los realizados previamente para obtener la respuesta al impulso y al escalón. Se aplica el operador inverso de Laplace a la expresión de la ecuación (12) con $X(s)$ la transformada de Laplace de la entrada, en este caso una función senoidal, cuya transformada para $t \geq 0$ se obtiene de tabla⁸ y resulta como se muestra a continuación en (35). Para este caso, se tomará la frecuencia angular $\omega_0 = 1571\text{ rad/s}$ (lo cual corresponde aproximadamente a una frecuencia de 250 Hz).

⁸ Tabla 15.2, Sadiku, 2015

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (35)$$

La expresión de la transformada inversa de Laplace de la respuesta a la función seno resulta como se muestra en la ecuación (36) y luego en (37) extrayendo las constantes fuera del operador, esto por la propiedad de linealidad del operador.

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ 12 \cdot \frac{(s+250)}{(s+500)} \cdot \frac{4000^2}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)} \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

$$= 12 \cdot 4000^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+250)}{(s+500)} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)} \right\} \quad (37)$$

Se expande en fracciones simples la expresión a antitransformar para aprovechar la propiedad de linealidad. En este caso, al multiplicar la transferencia por la transformada de la función seno, se agrega un par de polos complejos conjugados $p_{4,5} = \pm j\omega_0$. Por lo que la expansión en fracciones simples resulta como en (38).

$$y(t) = 12 \cdot 4000^2 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \frac{k_3}{(s-p_3)} + \frac{k_4}{(s-p_4)} + \frac{k_5}{(s-p_5)} \right\} \quad (38)$$

Para calcular los coeficientes $k_{1,2,3,4,5}$ se utiliza la ecuación (17), resultando como se muestra en (39), (40), (41), (42) y (43), respectivamente.

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow -500} \frac{(s+250)}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000}s + 4000^2\right)} \cdot \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)} \Rightarrow \boxed{k_1 \approx -9,41 \cdot 10^{-9}} \quad (39)$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{8000}{9} + j3900} \frac{(s + 250)}{(s + 500) \cdot \left(s - \left(-\frac{8000}{9} - j3900 \right) \right)} \cdot \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)}$$

$$\boxed{k_2 \approx (6,56 + j13,2) \cdot 10^{-9}} \quad (40)$$

$$k_3 = k_2^* \Rightarrow \boxed{k_3 \approx (6,56 - j13,2) \cdot 10^{-9}} \quad (41)$$

$$k_4 = \lim_{s \rightarrow j1571} \frac{(s + 250)}{(s + 500)} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{4000^2}{9000} s + 4000^2 \right)} \cdot \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)}$$

$$\boxed{k_4 \approx (-1,86 - j34,9) \cdot 10^{-9}} \quad (42)$$

$$k_5 = k_4^* \Rightarrow \boxed{k_5 \approx (-1,86 + j34,9) \cdot 10^{-9}} \quad (43)$$

Teniendo el valor de los coeficientes k_i y aplicando la antitransformada termino a termino resulta como en la ecuación (44).

$$y(t) = 12 \cdot 4000^2 (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + k_3 e^{-p_3 t} + k_4 e^{-p_4 t} + k_5 e^{-p_5 t}) u(t)$$

$$= 12 \cdot 4000^2 (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + k_2^* e^{-p_2^* t} + k_4 e^{-p_4 t} + k_4^* e^{-p_4^* t}) u(t) \quad (44)$$

Dado que se tienen dos pares de polos complejos conjugados, se reutiliza el resultado de la ecuación (23) para reescribir las exponenciales complejas en términos de funciones senoidales, resultando la expresión de la respuesta a una función senoidal con frecuencia angular $\omega_0 = 1571 \text{ rad/s}$ del sistema en dominio temporal $y(t)$ como se muestra a continuación en la ecuación (46).

$$y(t) \approx 12 \cdot 4000^2 \cdot 10^{-9} \left[-9,41 e^{-500 t} + 29,4 e^{-889 t} \cos(3900 t + 1,11) + 69,9 \cos(1571 t - 1,62) \right] u(t) \quad (45)$$

$$\boxed{y(t) \approx \left[-1,81 e^{-500 t} + 5,64 e^{-889 t} \cos(3900 t - 1,24) + 13,4 \cos(1571 t + 2,05) \right] u(t)} \quad (46)$$

Para el resultado obtenido anteriormente en la ecuación (46) de la respuesta a la señal seno de frecuencia angular $\omega_0 = 1571 \text{ rad/s}$ (aproximadamente 250 Hz) en dominio temporal se realizó un gráfico en función del tiempo, el cual se muestra en la figura 3.

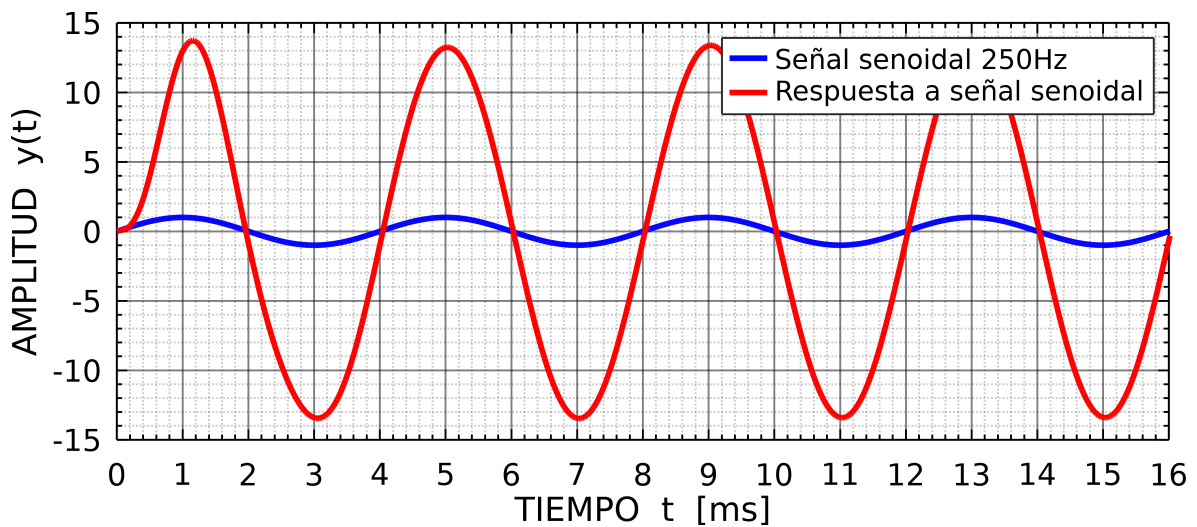


Figura 3: Respuesta a señal senoidal de 250Hz analítica en dominio temporal

En la figura 3 se observa que para la señal senoidal de frecuencia dada se amplifica la amplitud en aproximadamente 14 veces (o $22,9 \text{ dB}$) y la fase no cambia.

3. Circuitos teóricos

Para la elección del circuito se tiene en cuenta la descomposición en transferencias más simples que se muestra en la ecuación (7) y también todo el análisis realizado de cada una de las transferencias, en particular se sabe que la transferencia H_1 corresponde con un filtro pasa altos de primer orden con una diferencia de ganancia entre frecuencias altas y bajas de $6dB$; mientras que la transferencia H_2 corresponde con un filtro pasa bajos de segundo orden. La transferencia total, es decir el producto de ambas transferencias, debe tener una ganancia de 12 (o $21,6dB$), este factor de ganancia no está fijo para la descomposición de la transferencia si no que se reparte entre ambas transferencias de acuerdo a como sea más conveniente a la hora de implementar el circuito.

La descomposición de la transferencia resulta muy útil ya que el circuito resultante será la cascada de cada uno de los circuitos respectivos a cada transferencia, es por esto que cada uno de los circuitos o “etapas” se diseña por separado y luego se conecta la salida de uno a la entrada de otro.

3.1. Filtro pasa altos de primer orden

La transferencia H_1 es de la forma de la ecuación (47), la cual se puede implementar mediante un divisor resistivo con impedancias Z_1 y Z_2 .⁹

$$T(s) = K \cdot \frac{s + z_1}{s + p_1} \quad (47)$$

Para un divisor de impedancias no inductivas, como el que se muestra en la figura 4a, la función de transferencia resulta como se muestra en (48). En la misma ecuación se muestra la igualdad utilizando admitancias, que se definen como la inversa de la impedancia $Y = 1/Z$. Se utilizan admitancias porque simplifican las expresiones de resistores y capacitores en paralelo.

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = T(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}; \quad Y_1 = s C_1 + \frac{1}{R_1}; \quad Y_2 = s C_2 + \frac{1}{R_2}; \quad (48)$$

Aplicando las expresiones de las admitancias de la ecuación (48) en la ecuación (47), y denotando $G = 1/R$ a la conductancia, entonces la transferencia del divisor de impedancias resulta como se muestra en (49). Luego, sacando factor común C_1 en el numerador y $(C_1 + C_2)$ en el denominador, se obtiene una expresión para la transferencia del circuito similar a la expresión de la transferencia genérica de (47).

⁹ Sección 3.2, “Realization with Passive Elements”, Rolf Schaumann, 2001

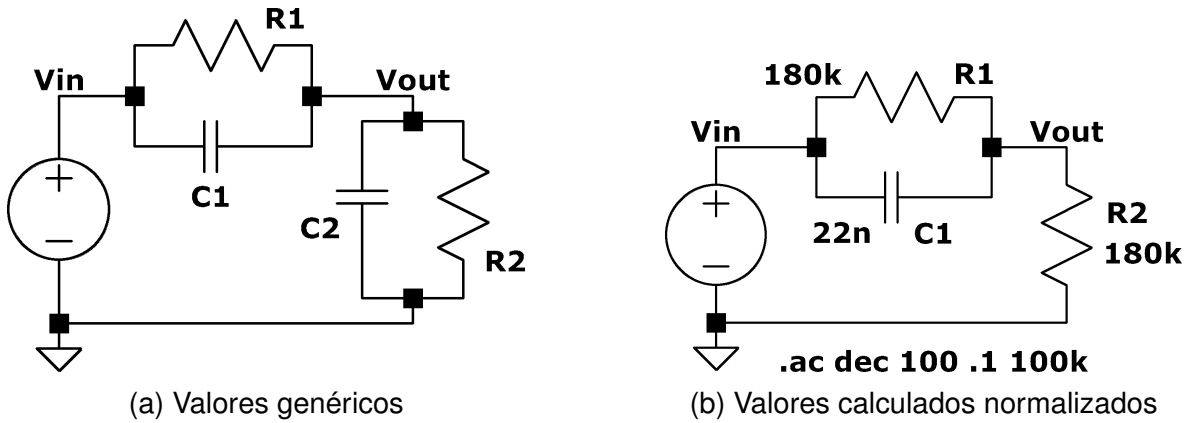


Figura 4: Circuito pasa altos de primer orden con divisor de impedancias

$$T(s) = \frac{s C_1 + G_1}{s (C_1 + C_2) + G_1 + G_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{s + \frac{G_1}{C_1}}{s + \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2}} \quad (49)$$

Igualando la ecuación (49) con la expresión genérica de (47) resulta como se muestra a continuación en (50).

$$T(s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{s + \frac{G_1}{C_1}}{s + \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2}} = K \cdot \frac{s + z_1}{s + p_1} \quad (50)$$

De la expresión (50) se obtiene:

$$z_1 = \frac{G_1}{C_1} = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (51)$$

$$p_1 = \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) (C_1 + C_2)} \quad (52)$$

$$K_{LF} = T(0) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (53)$$

$$K_{HF} = T(\infty) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (54)$$

Para el caso de la transferencia H_1 se tiene que $z_1 = 250$, $p_1 = 500$; la ganancia a frecuencias muy bajas $K_{LF} = T(0) = 0,5$ y a frecuencias muy altas $K_{HF} = T(\infty) = 1$.

Dadas las ganancias K_{LF} y K_{HF} , entonces de (53) se obtiene $R_1 = R_2$, y de (54) resulta que $C_2 = 0$. Imponiendo $C_1 = 22nF$, entonces de la ecuación (51) resulta $R_1 = R_2 \approx 181818\Omega$ y dado que 181818Ω no es un valor comercial estandarizado se toma el valor $180k\Omega$.

Reemplazando los valores en el circuito de la figura 4a, resulta en el circuito de la figura 4b. Para el circuito con los valores reemplazados se realizó una simulación en LTSpice de manera de comparar el desempeño con la transferencia H_1 . El resultado se muestra en el diagrama de Bode de la figura 5, en la cual se observa que la diferencia es prácticamente nula entre la respuesta en frecuencia del circuito simulado y la transferencia teórica H_1 .

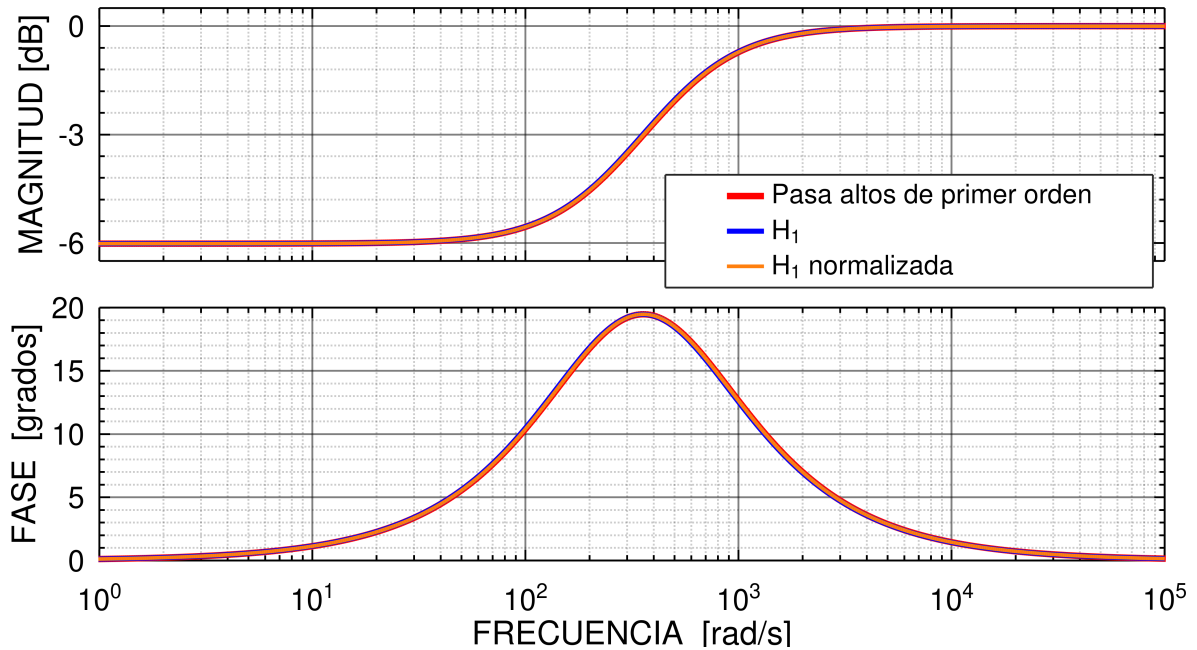


Figura 5: Diagrama de Bode de circuito pasa altos, H_1 y H_1 normalizada

La transferencia H_1 resultante con los valores considerados normalizados se muestra a continuación en (55).

$$H_1(s) \approx \frac{s + 252,52}{s + 505,05} \quad (55)$$

Dados los valores de R_1 y R_2 elegidos, la transferencia de la ecuación (55) impone un error con respecto a la transferencia H_1 , en valores porcentuales se tiene para la ganancia aproximadamente 0,002 %, y para las singularidades de 1 %.

3.2. Filtro pasa bajos de segundo orden

Para implementar la transferencia H_2 se elige un circuito Sallen-Key pasa bajos de segundo orden con ganancia unitaria, tal como el que se muestra en la figura 6. Se elige este tipo de filtro ya que es relativamente sencillo con respecto a otros filtros y los cálculos son directos, y el hecho de que sea de ganancia unitaria permite simplificar aun más las expresiones, en particular la expresión del factor de calidad Q .

La transferencia de un filtro Sallen-Key pasa bajos con ganancia unitaria se muestra a continuación en la ecuación (56).¹⁰

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} \right) s + \left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)} \quad (56)$$

Igualando la transferencia anterior de la ecuación (56) con la expresión genérica del filtro pasa bajos de segundo orden mencionado en la ecuación (10) se obtienen las expresiones para la frecuencia natural ω_0 y el factor de calidad Q que se muestran en las ecuaciones (57) y (58), respectivamente.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (57)$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}}{\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2}} \quad (58)$$

Para obtener valores de los componentes R_1 , R_2 , C_1 y C_2 se sabe que ω_0 debe ser 4000 rad/s y Q debe ser de 2,25, reemplazando en las ecuaciones (57) y (58) se tiene un sistema de dos ecuaciones con 4 incógnitas, es por esto que se utiliza un programa de calculo numérico que dada una lista de valores normalizados de resistencias y capacitores se calcula el error de ω_0 y Q para cada cuarteto de valores R_1 , R_2 , C_1 , C_2 posible y se ordena de menor a mayor error combinado entre ω_0 y Q , resultando en una lista ordenada de valores con los respectivos errores.

¹⁰ Esto se obtiene de la sección 4.5.1: "Sallen-Key Circuits", Rolf Schaumann, 2001. Imponiendo $R_A \rightarrow \infty$, $R_B = 0$, logrando así ganancia unitaria $K = 1$.

En la tabla 1 se muestran algunos de los mejores valores obtenidos mediante el programa numérico. En particular, se eligió $20k\Omega$, $30k\Omega$, $47nF$ y $2,20nF$ para R_1 , R_2 , C_1 y C_2 , respectivamente, ya que si bien no es el cuarteto con menor error, se tienen valores de resistencia mayor que otros conjunto de valores, lo cual es deseable, ya que se incrementa la impedancia y disminuye el consumo de corriente, y los capacitores tienen valores fácilmente disponibles comercialmente. De cualquier forma el error de ω_0 y Q permanece por debajo de 1 %.

R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	C_1 [nF]	C_2 [nF]	ω_0 [rad/s]	$\Delta\omega_0$ [%]	Q	ΔQ [%]
1300	15000	470	6,80	4005,71	0,14	2,252	0,10
15000	1300	470	6,80	4005,71	0,14	2,252	0,10
2700	4700	330	15	3989,94	0,25	2,258	0,35
30000	20000	47	2,20	4014,80	0,37	2,264	0,64

Tabla 1: Algunos valores obtenidos que minimizan el error de ω_0 y Q .

Con los valores elegidos, la transferencia H_2 resulta como se muestra a continuación en la ecuación (59).

$$H_2(s) \approx \frac{16118619,04}{s^2 + 1773,05s + 16118619,04} \quad (59)$$

Y el circuito resultante con los valores elegidos que implementa la transferencia H_2 se muestra en la figura 6 a continuación.

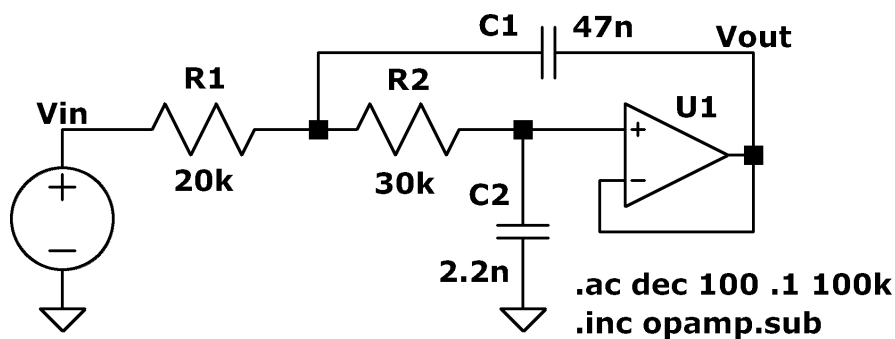


Figura 6: Circuito pasa bajos Sallen-Key

Se simuló el circuito de la figura 6 en LTSpice obteniendo la respuesta en frecuencia y se comparó con la respuesta en frecuencia de la transferencia H_2 , el resultado se muestra en la figura 7 en la cual se observa que la respuesta en frecuencia del circuito elegido y la transferencia H_2 son prácticamente idénticas.

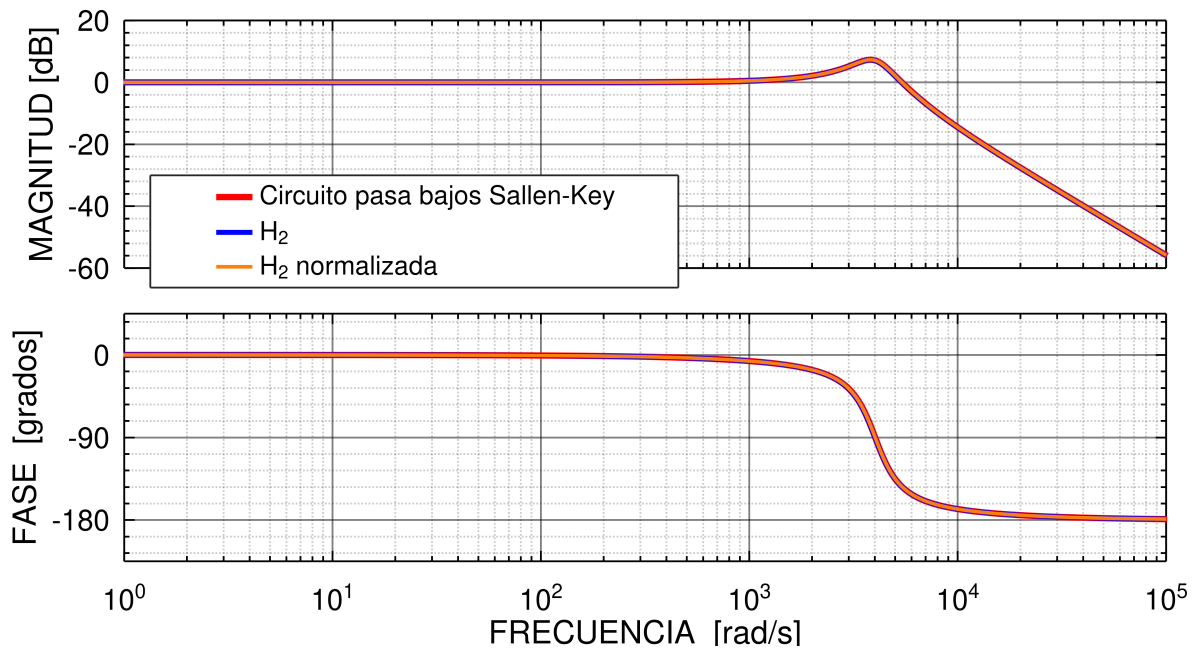


Figura 7: Diagrama de Bode de circuito pasa bajos Sallen-Key, H_2 y H_2 normalizada

3.3. Amplificador no inversor

Como bien se mencionó la transferencia H se obtiene realizando el producto entre las transferencias H_1 , H_2 y un factor de ganancia 12. Dado que los circuitos correspondientes se diseñaron acorde a las transferencias, se necesita de una etapa adicional que implemente el factor de ganancia. Para esto se utiliza un amplificador no inversor con un circuito como el de la figura 8.

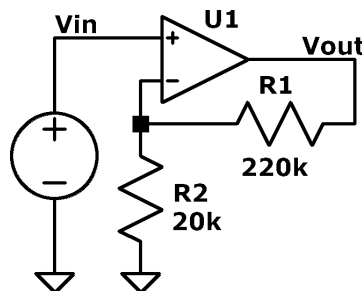


Figura 8: Circuito amplificador no inversor

La transferencia del circuito amplificador no inversor de la figura 8 resulta como se muestra a continuación en la ecuación (60).

$$T(s) = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (60)$$

Dado que se requiere un factor de ganancia de 12, es decir, una transferencia $T(s)$ constante e igual a 12 para todas las frecuencias, de (60) se obtiene que R_2 debe ser 11 R_1 . Eligiendo $20k\Omega$ para R_1 , entonces R_2 resulta $220k\Omega$.

3.4. Circuito propuesto

El circuito final resulta de la “cascada” o conexión en serie de los diferentes etapas: el filtro pasa altos que implementa la transferencia H_1 , el filtro pasa bajos Sallen-Key que implementa la transferencia H_2 , y el amplificador no inversor para ajustar la ganancia. La transferencia H normalizada, resultante del producto de todas las etapas, se muestra en la ecuación (61) a continuación.

$$H(s) \approx 12 \left(\frac{s + 252,52}{s + 505,05} \right) \left(\frac{16118619,04}{s^2 + 1773,05s + 16118619,04} \right) \quad (61)$$

Hay que tener en cuenta que la cascada de diferentes circuitos solo es posible en la práctica si los circuitos no interfieren entre sí, en particular esto es válido cuando la impedancia de salida del primer circuito es mucho menor que la impedancia de entrada del segundo circuito,¹¹ teniendo esto en cuenta se ubica en primer lugar (más cerca de la señal de entrada) el filtro pasa altos de primer nivel, ya que este tiene impedancia de entrada y salida relativamente baja, luego el amplificador no inversor ya que este tiene una impedancia de entrada muy alta debido al amplificador operacional, por ultimo se ubica el filtro Sallen-Key de segundo orden tal como se muestra en la figura 9.

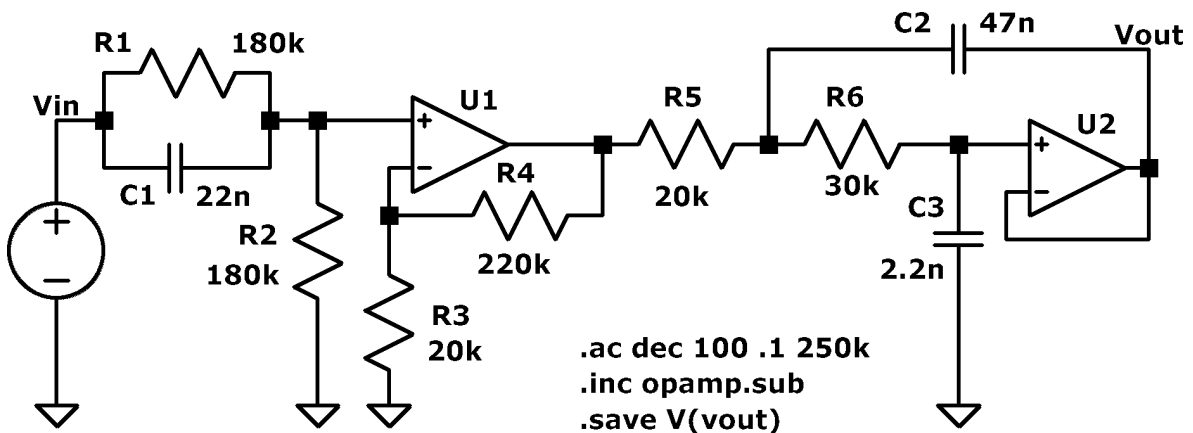


Figura 9: Circuito propuesto con valores normalizados

¹¹ Esto se obtiene de la sección 3.6: “Cascade Design”, Rolf Schaumann, 2001

Para el circuito final de la figura 9 se realiza una simulación en LTSpice de la respuesta en frecuencia y se compara con la respuesta en frecuencia de la transferencia H , el resultado se muestra a continuación en la figura 10 en la cual se observa que la respuesta en frecuencia es prácticamente la misma.

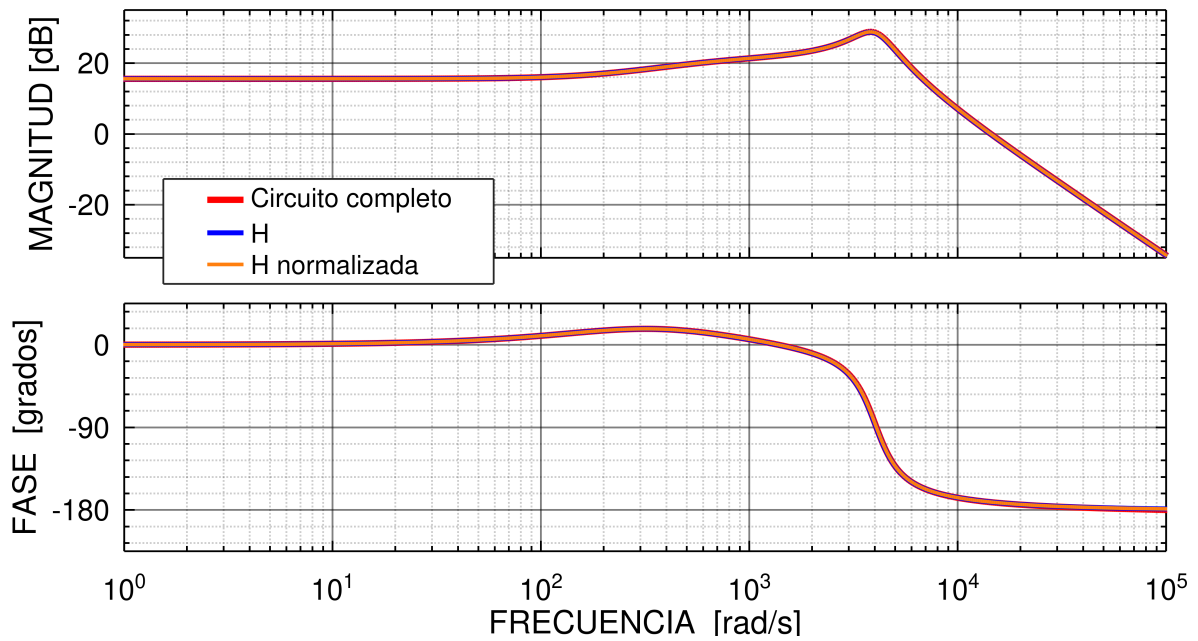


Figura 10: Diagrama de Bode de circuito propuesto ideal, H y H normalizada

En la tabla 2 se muestra el error porcentual entre la transferencia normalizada de la ecuación 61 con respecto a la transferencia ideal de la ecuación 2. Se puede ver que todos los parámetros se ubican en valores menores o iguales a 1 %.

	A_v	ΔA_v	ω_0	$\Delta \omega_0$	Q	ΔQ	$ z_1 $	$ \Delta z_1 $	$ p_1 $	$ \Delta p_1 $	$ p_{2,3} $	$ \Delta p_{2,3} $
H	6,00	0,00	4000,0	0,00	2,25	0,00	250,0	0,00	500,0	0,00	4000,0	0,00
H_{norm}	5,99	0,17	4014,8	0,37	2,26	0,44	252,5	1,00	505,1	1,00	4014,8	0,37

Tabla 2: Errores porcentuales entre la transferencia ideal y normalizada

4. Simulaciones

A continuación se realizan simulaciones para comparar la transferencia H ideal y con valores normalizados, con la respuesta del circuito propuesto. Para el circuito propuesto se utiliza el modelo de amplificador operacional a utilizar en la placa final, el TL081.

Se compara la expresión de la transferencia con valores ideales de la ecuación (2), y la expresión con valores normalizados de la ecuación (61). El circuito a simular en LTSpice se muestra en la figura 11 y es similar al circuito propuesto ideal de la figura 9 pero con la adición del modelo de amplificador operacional TL081 y la fuente de alimentación simétrica de ± 24 V. Además en el circuito a simular se incluyen algunas directivas de LTSpice, pero estas se irán cambiando conforme se hagan las diferentes simulaciones, así como también la fuente en tensión la entrada V_{in} .

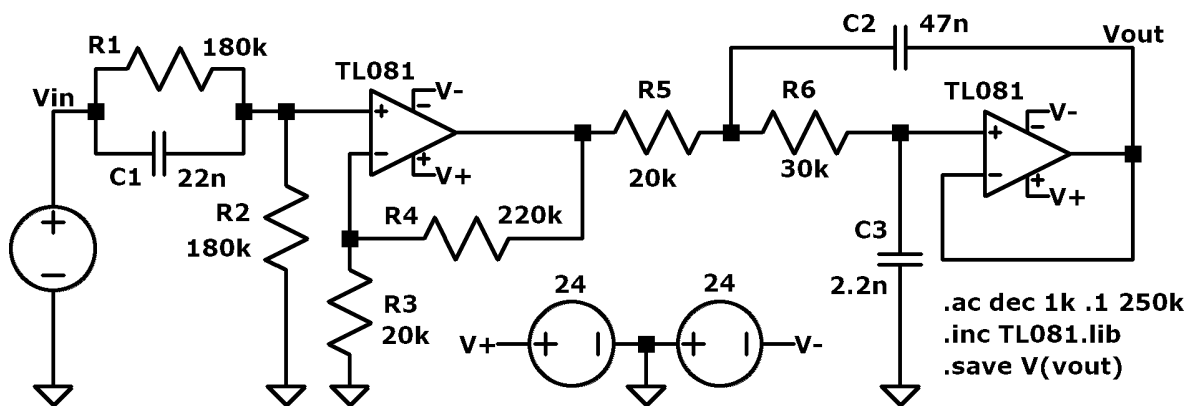


Figura 11: Circuito final a simular en LTSpice

4.1. Respuesta en frecuencia

Para obtener la respuesta en frecuencia del circuito se utiliza la misma fuente y directivas de LTSpice que se muestran en la figura 11, variando la frecuencia de la fuente de 0,1 Hz a 250 Hz, aunque luego se grafica utilizando la frecuencia angular en rad/s. El resultado se muestra en la figura 12 y se compara en la misma figura con el diagrama de Bode de la transferencia H con valores teóricos y normalizados.

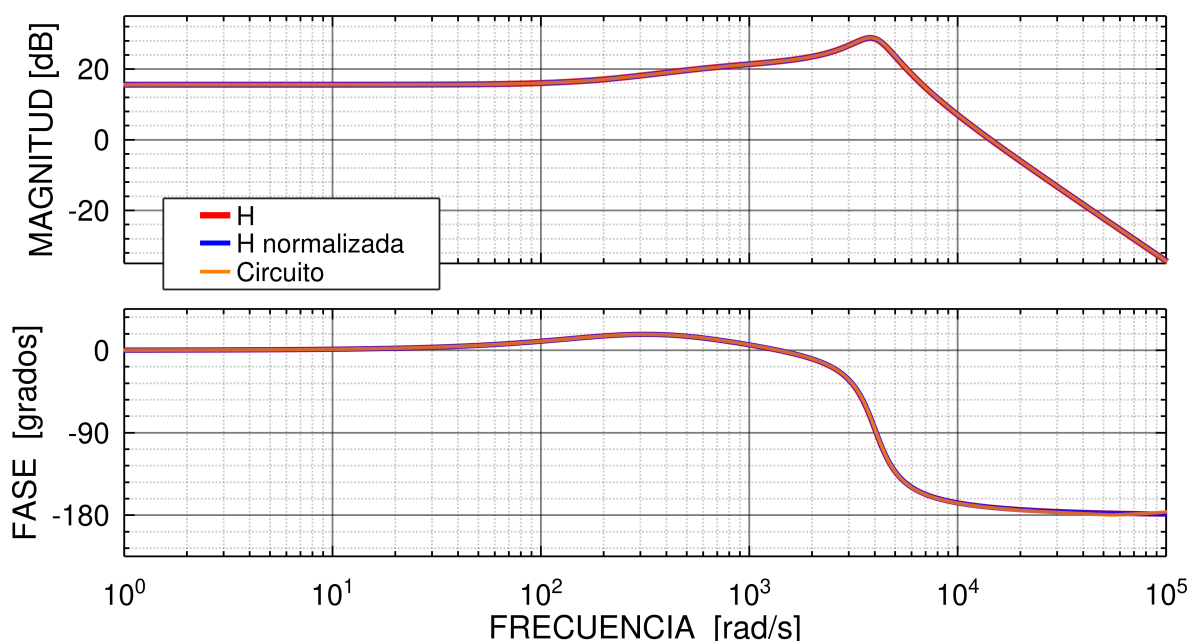


Figura 12: Diagrama de Bode de transferencias y circuito

4.2. Respuesta al impulso

En la figura 13 a continuación se muestra la respuesta al impulso de la transferencia ideal y normalizada. Se puede observar que prácticamente responden de igual forma. En esta parte no se incluye la respuesta al impulso del circuito ya que no es realizable en la práctica, ya que no exista una fuente que cumpla con tener tensión infinitamente grande y tiempo de subida infinitamente pequeño, aunque se podría obtener una aproximación, pero de todas formas no se incluye.

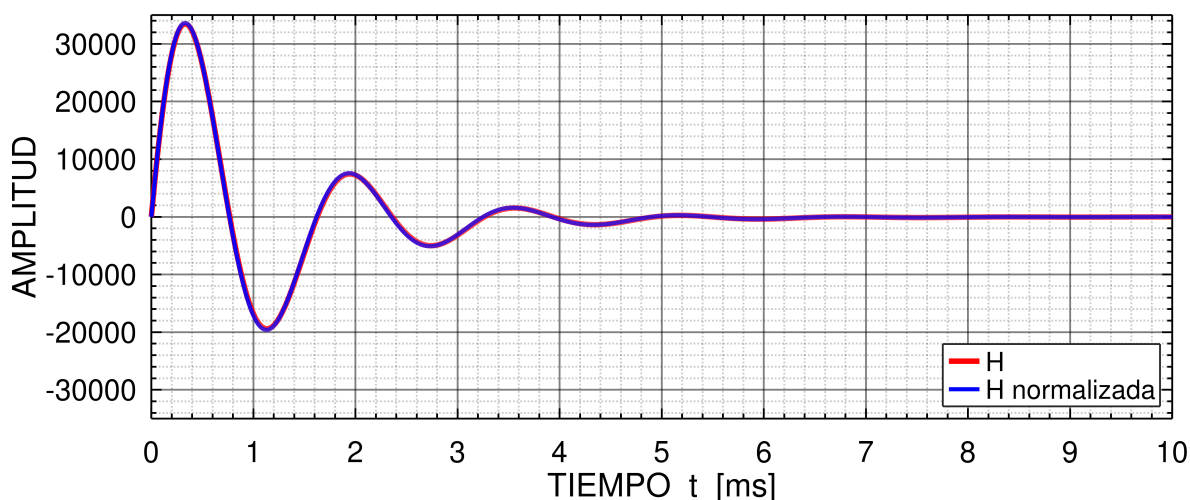


Figura 13: Respuesta al impulso transferencia ideal y normalizada

Ambas transferencias responden de igual forma, en cualquier instante, con ligeras variaciones producto de la normalización de los valores. También se observa que ambas transferencias resultan similares a la respuesta al impulso obtenida de manera analítica mostrada en la figura 1.

4.3. Respuesta al escalón

Para simular la respuesta al escalón en LTSpice se cambia la fuente de tensión del circuito de la figura 11 por una fuente inicialmente con tensión nula pero que cambia a 1 V en un tiempo de 1 ns, como se muestra en la figura 14.

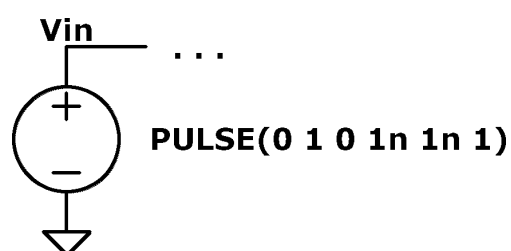


Figura 14: Fuente utilizada en LTSpice para simular respuesta al escalón

En la figura 15 se muestra la respuesta al escalón de la transferencia ideal y normalizada, y también la respuesta del circuito propuesto simulado en LTSpice con la señal de entrada mencionada previamente. Se puede ver que ambas transferencias se comportan prácticamente iguales, pero la respuesta del circuito presenta un sobrepico (u overshoot) mayor durante el régimen transitorio, luego durante el régimen permanente tanto las transferencias como el circuito convergen al mismo valor.

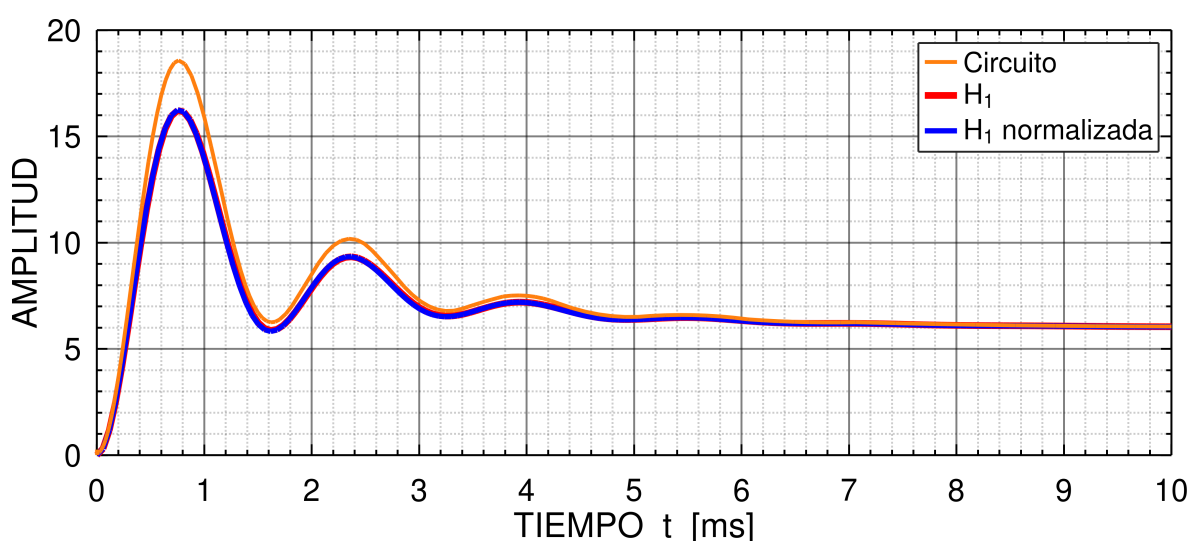


Figura 15: Respuesta al escalón transferencias y circuito.

4.4. Respuesta a señal senoidal

Para simular la respuesta a señales senoidales en LTSpice se cambia la fuente de tensión del circuito de la figura 11 por una fuente que genera una señal senoidal de frecuencia arbitraria, en este caso se parametrizó la frecuencia de la fuente de manera de generar con la misma fuente 3 señales senoidales de diferentes frecuencias, tal como se muestra en la figura 16. Las señales senoidales generadas tienen amplitud 0,1 V y son de frecuencias 250 Hz, $\omega_0/2\pi \approx 636,6$ Hz y 10 kHz.

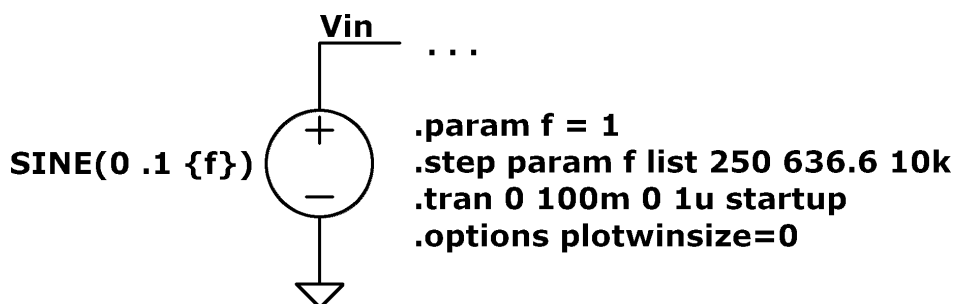


Figura 16: Fuente y directivas de LTSpice para generar señales senoidales

En la figura 17 se observa que tanto la transferencia con valores ideales como la que posee valores normalizados se comportan de manera similar en cualquier instante. La respuesta del circuito en una primera instancia presenta un sobrepico más elevado que el de las transferencias pero luego pasados 5 ms converge a un comportamiento similares al de las transferencias. Se observa que se amplifica la amplitud y no hay cambio de fase, lo cual es congruente con el diagrama de Bode de la figura 12 para la frecuencia 250 Hz (aproximadamente 1571 rad/s)

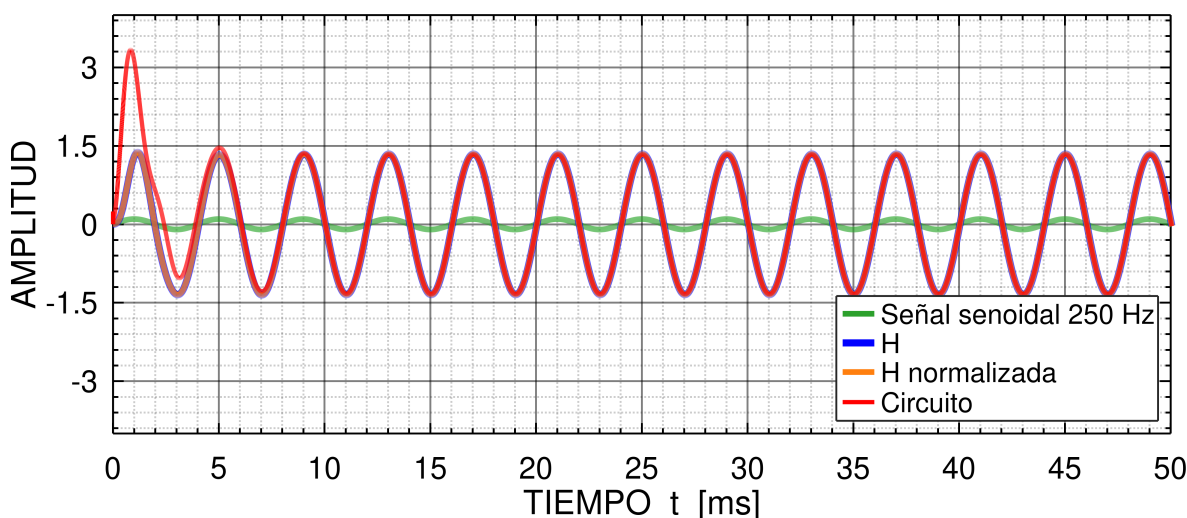


Figura 17: Respuesta a señal senoidal de 250 Hz transferencias y circuito.

En la figura 18 se tiene las respuestas para la señal senoidal de aproximadamente $636,6 \text{ Hz}$ (o $\omega_0 \text{ rad/s}$), según el diagrama de Bode de la figura 12 para esta frecuencia se tiene un máximo en ganancia y un desfase de -90° , lo cual se aprecia en la figura. También se aprecia el comportamiento del circuito con un sobrepico elevado con respecto a las transferencias.

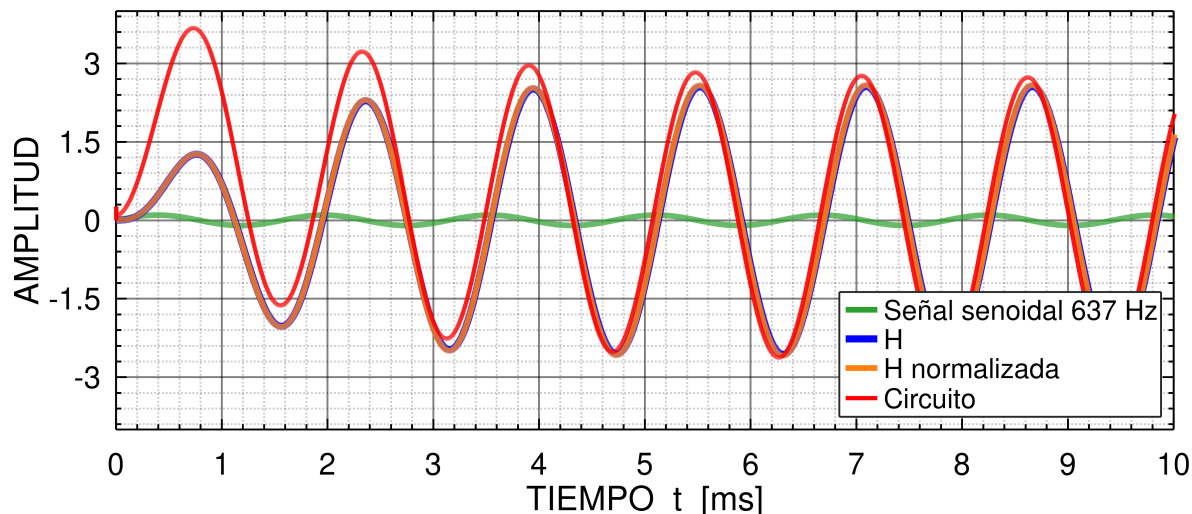


Figura 18: Respuesta a señal senoidal de $636,6 \text{ Hz}$ transferencias y circuito

La figura 19 muestra las respuestas para una señal senoidal de frecuencia 10 kHz . Se ve que las transferencias se comportan de igual forma, atenuando drásticamente la señal. Para el circuito, en un principio se tiene un sobrepico elevado y luego de aproximadamente 5 ms converge a valores similares al de las transferencias.

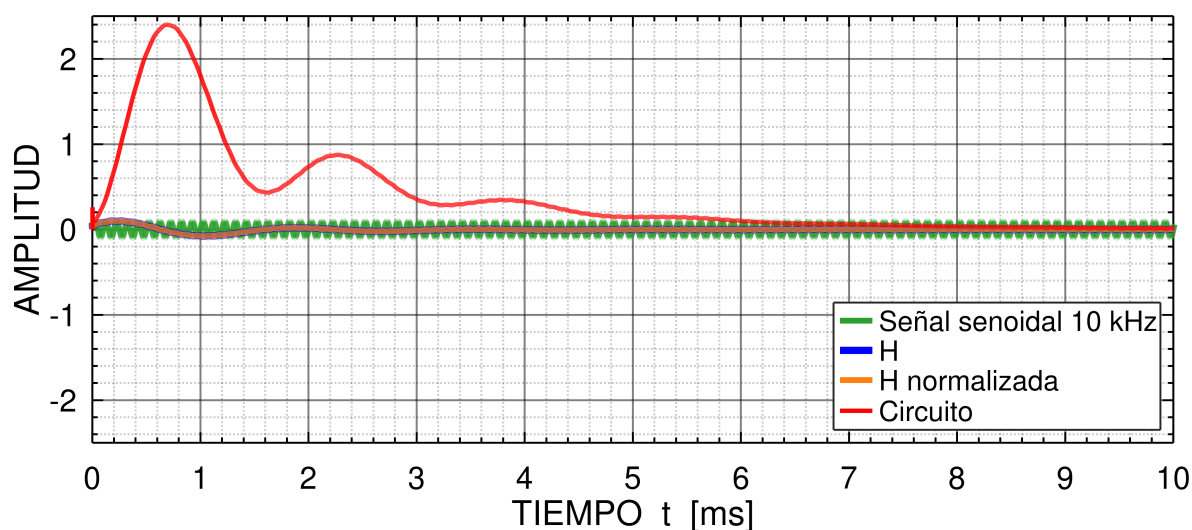


Figura 19: Respuesta a señal senoidal de 10 kHz transferencias y circuito

4.5. Respuesta a señal cuadrada

Para simular la respuesta a señales cuadradas, se realiza un procedimiento análogo al realizado para generar señales senoidales, cambiando la fuente de tensión del circuito de la figura 11 por una fuente que genere una señal cuadrada de frecuencia arbitraria, y parametrizando la frecuencia de la fuente de manera de generar con la misma fuente 3 señales de diferentes frecuencias, tal como se muestra en la figura 20. Las señales cuadradas generadas tienen componente continua nula, amplitud $0,1\text{ V}$ y son de frecuencias 10 Hz , 250 Hz y $2,5\text{ kHz}$.

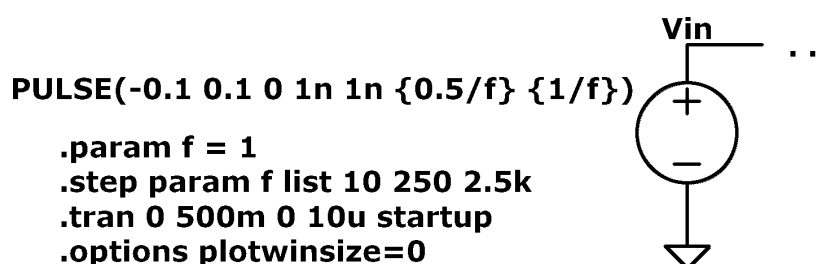


Figura 20: Fuente y directivas de LTSpice para generar señales cuadradas

Para la señal cuadrada de 10 Hz , se tiene la respuesta de las transferencias y el circuito en la figura 21. Se puede ver que las transferencias siguen la forma de onda de la señal cuadrada, a diferencia del circuito que presenta un sobrepico elevados en las transiciones, aunque pasados aproximadamente 10 ms de la transición y hasta antes de la siguiente transición, la respuesta de las transferencias y el circuito se comportan de manera muy similar.

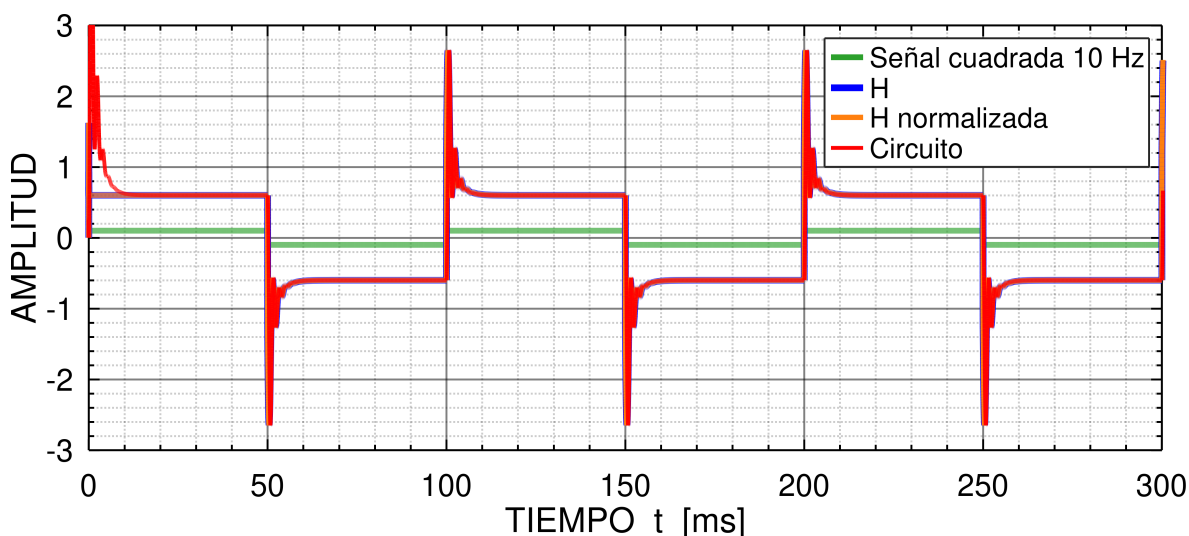


Figura 21: Respuesta a señal cuadrada de 10 Hz transferencias y circuito

Para las dos señales cuadradas de mayor frecuencia, 250 Hz y 2,5 kHz, se tiene la respuesta de las transferencias y el circuito en las figuras 22 y 23. Para estos casos tanto las transferencias como el circuito no tienen una coherencia con respecto a la señal cuadrada de referencia, lo que se puede decir es que ambas transferencias se comportan de manera similar entre si, y en el caso de la señal de 250 Hz con el circuito, pero esto no ocurre para el caso de la señal de 2,5 kHz, en la cual las transferencias se comportan de una forma y el circuito de otra.

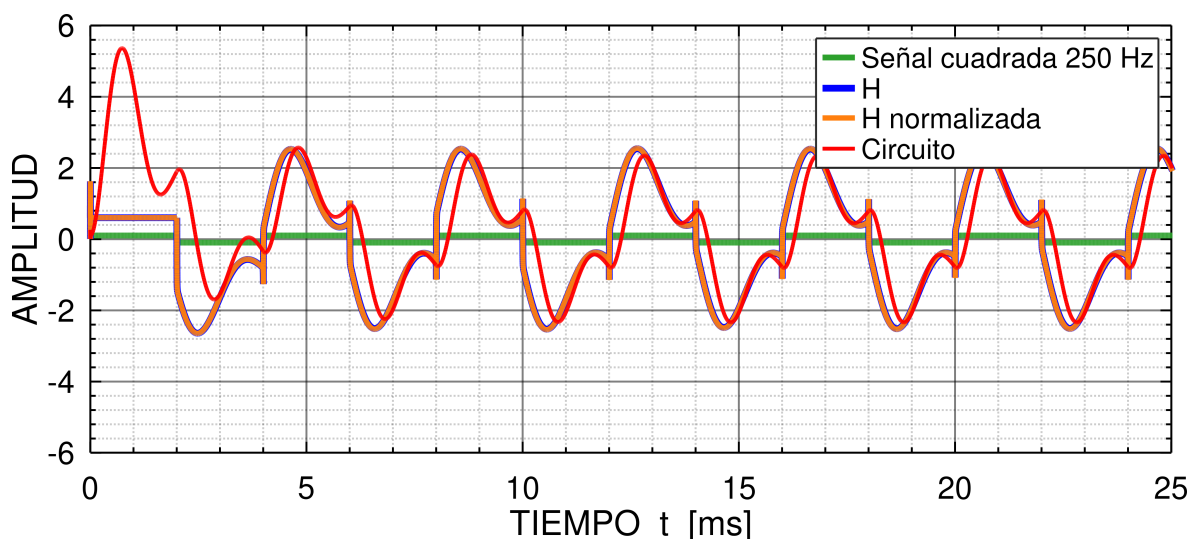


Figura 22: Respuesta a señal cuadrada de 250 Hz transferencias y circuito

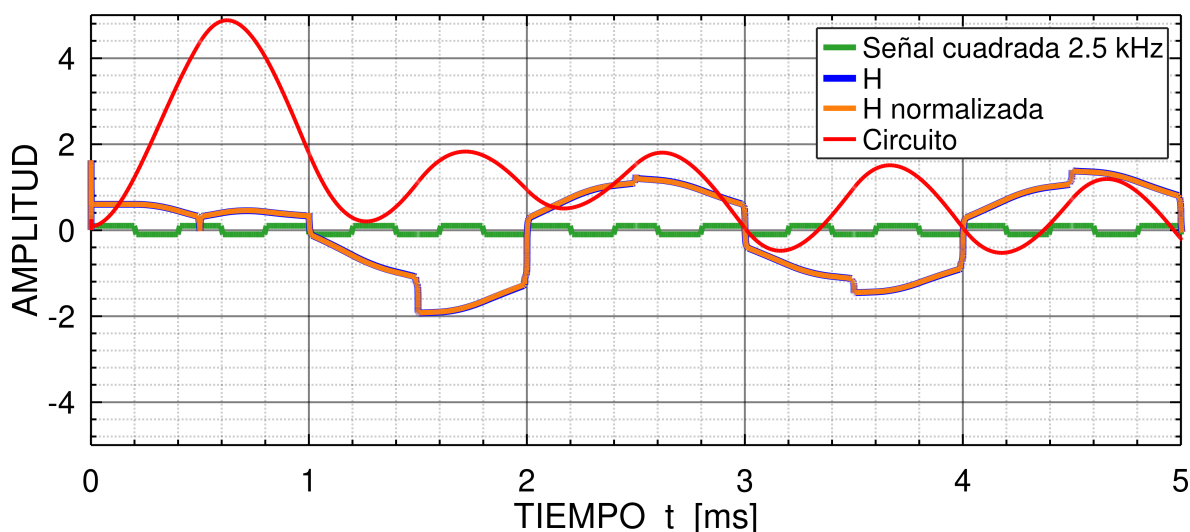


Figura 23: Respuesta a señal cuadrada de 2,5 kHz transferencias y circuito

5. Implementación del circuito

A continuación se diseña e implementa en una placa el circuito propuesto que responde acorde a la transferencia asignada. Luego se tomarán mediciones para comparar la respuesta del circuito con las respuestas halladas analíticamente y por métodos numéricos.

5.1. Diseño

Para la implementación física se siguió el circuito propuesto, el cual se puede ver en la figura 9, y se optó por implementar el circuito en una placa de cobre FR-4 mecanizada con CNC. Dado el costo de la placa mecanizada se tomó la decisión de agregar un amplificador operacional adicional en la entrada en configuración de seguidor de tensión (o buffer) de manera tal que la impedancia de entrada del filtro sea muy grande, esto para evitar que dispositivos de medición afecten los parámetros del filtro y en caso de no necesitarse, saltar esa etapa mediante un puente. A continuación en la figura 24 se muestra el circuito implementado en la placa.

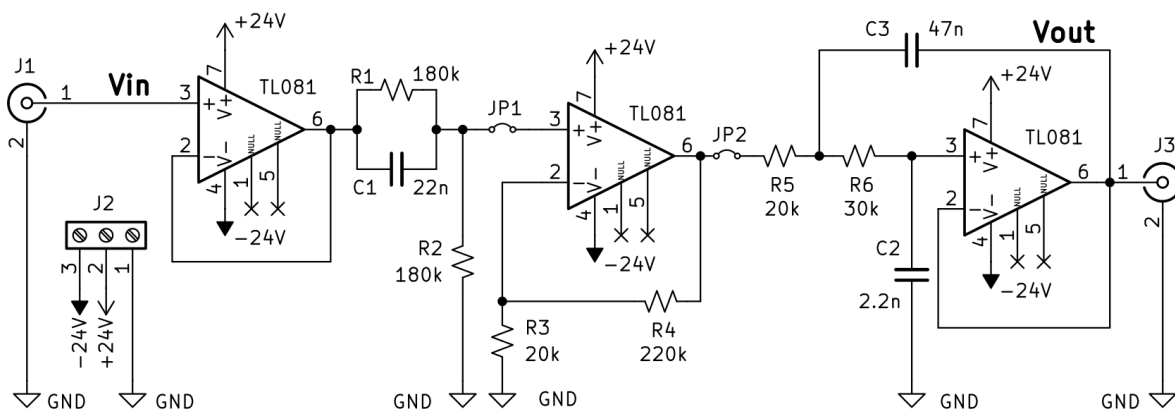


Figura 24: Circuito implementado en la placa

Para la entrada y salida de las señales a la placa se utilizaron conectores coaxiales BNC (Bayonet Neill–Concelman) ya que son el estándar en los equipos de medición utilizados (generador de señales, osciloscopio, etc), de esta forma resulta sencillo y directo conectar y desconectar los equipos de medición a la placa. En la figura 25 se muestran vistas de la placa modelada.

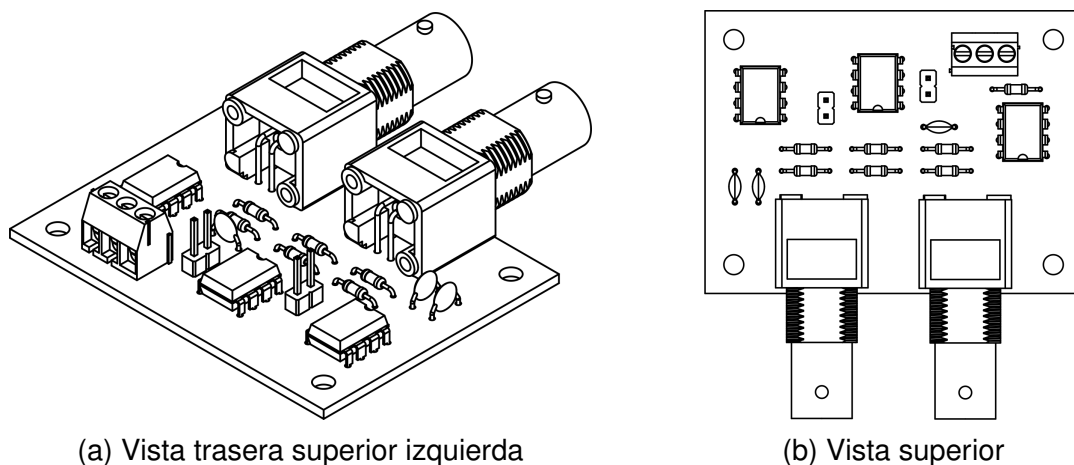


Figura 25: Vistas de la placa modelada

5.2. Armado

A continuación en la figura 26 se muestran capturas de la placa mecanizada con los componentes soldados. Se han identificado los conectores de entrada y salida de la placa para evitar confusiones: “IN” es la entrada de la señal, “OUT” indica el conector de salida de señal, “T” es la tierra ó 0 V de la alimentación, “V+” es la entrada de alimentación positiva y “V-” indica la entrada de alimentación negativa.

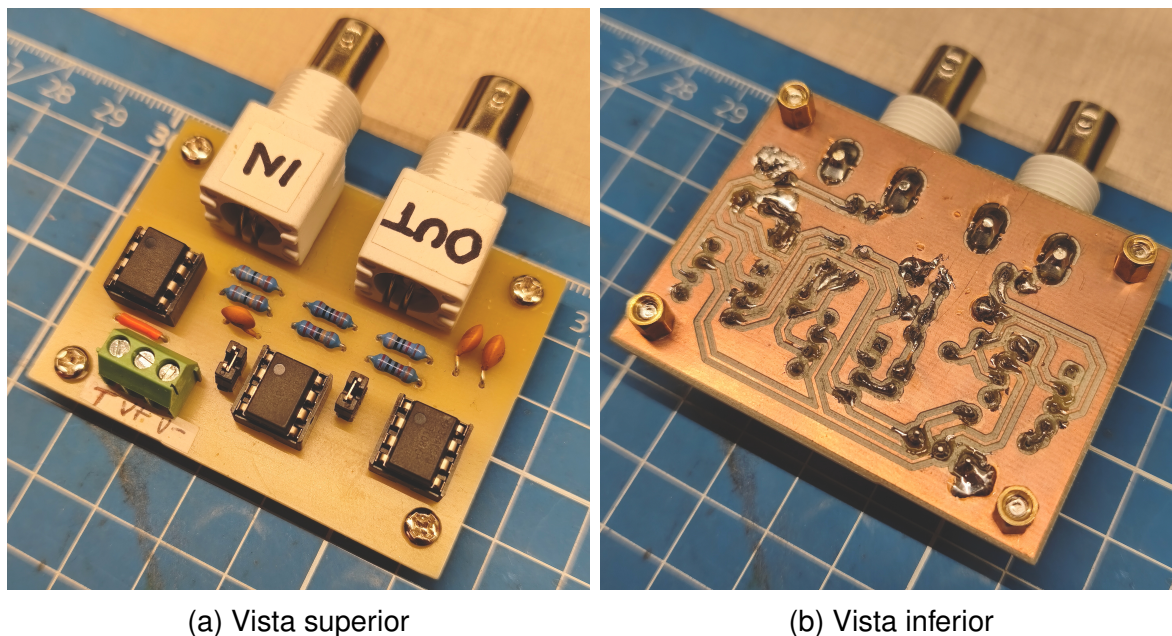


Figura 26: Vistas de la placa armada

5.3. Mediciones

Para las mediciones se utilizó el dispositivo OWON HDS25S el cual dispone de un osciloscopio y un generador de señales integrado. El diagrama de conexiones para realizar las mediciones se muestra a continuación en la figura 27. Para la alimentación de la placa se utilizó ± 12 V, ya que mediante simulación se comprobó que no afecta significativamente la respuesta en frecuencia del filtro si se utilizan señales de prueba de menor amplitud, con respecto a los ± 24 V del circuito propuesto.

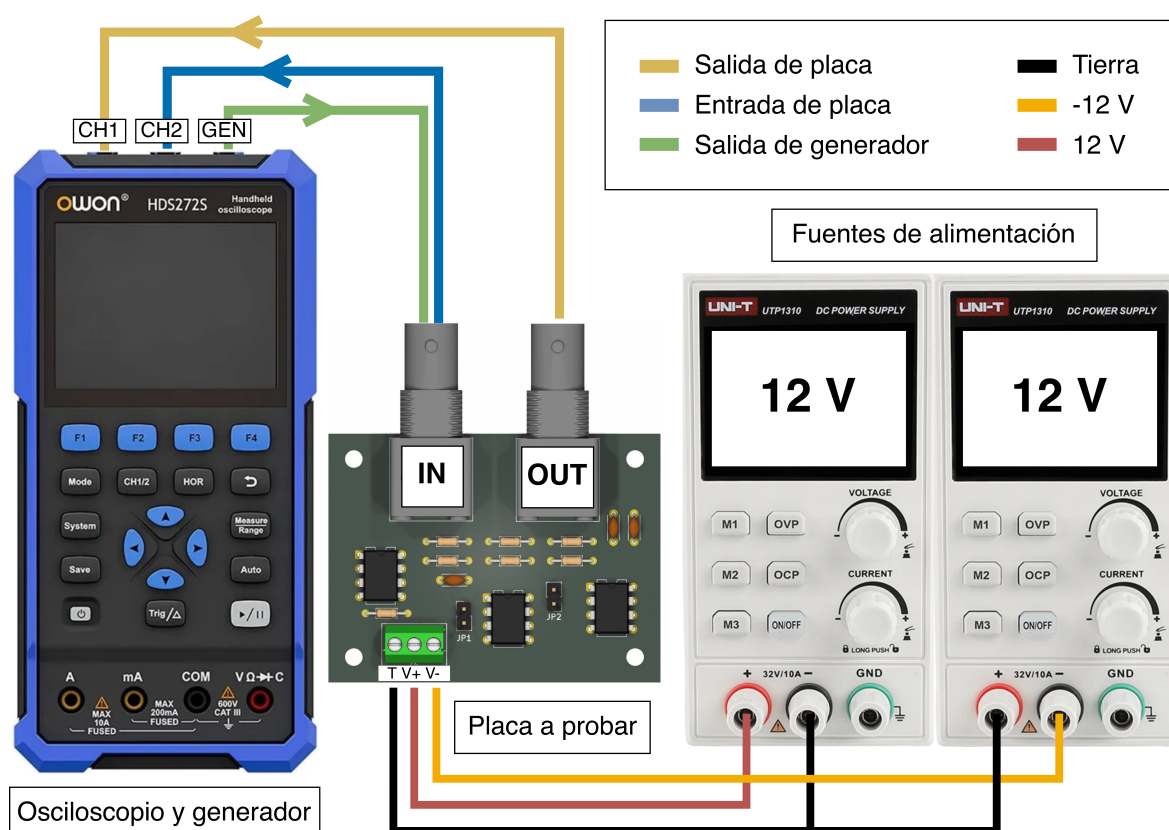
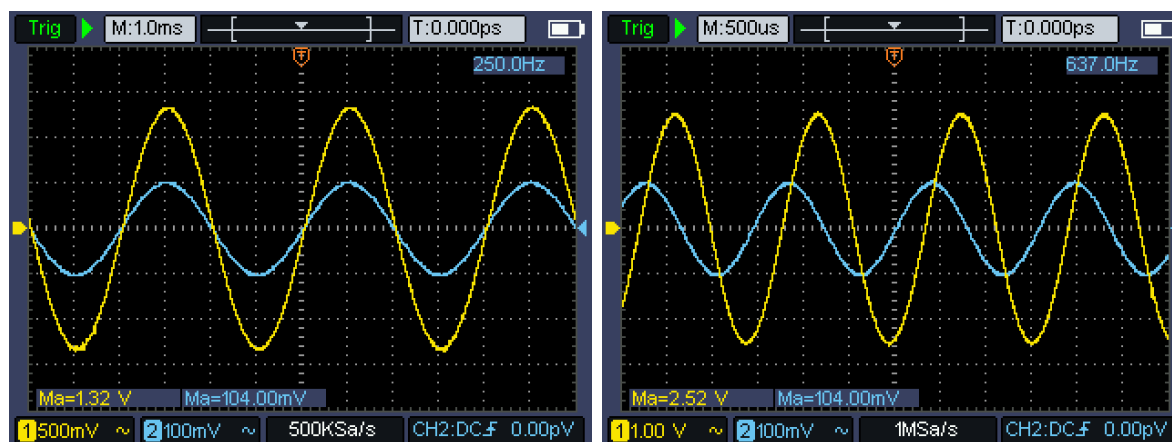


Figura 27: Diagrama de conexiones para realizar las mediciones sobre la placa

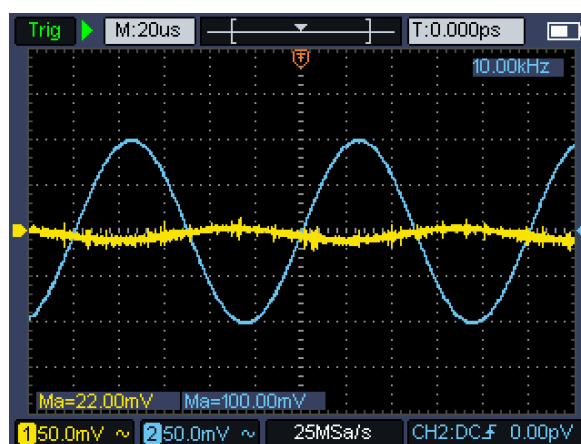
Mediante el generador de funciones se generaron las mismas señales que las analizadas mediante métodos analíticos y numéricos. En primer lugar se analizó la respuesta a señales senoidales de amplitud 100 mV y frecuencias 250 Hz, 637 Hz y 10 kHz, como se muestra en la figura 28. Para la señal senoidal de 250 Hz, se puede ver que la respuesta medida de la placa de la figura 28a es similar a las respuestas de la figura 17, dado que no se tiene cambio de fase y hay una ganancia de entre 12 y 14 veces. Lo mismo ocurre con la senoidal de 637 Hz de la figura 28b la cual es similar a la vista previamente en la figura 18, en ambas se ve un ligero cambio de fase y una ganancia de entre 20 y 25 veces. Para la senoidal de 10 kHz, también

se tiene una similitud con las respuesta de la figura 19 obtenida mediante métodos numéricos, ya que como se puede ver en la figura 28c, la respuesta de la placa es similar, dado que se tiene una atenuación casi por completo de la señal de entrada.



(a) Salida para señal senoidal de 250 Hz

(b) Salida para señal senoidal de 637 Hz



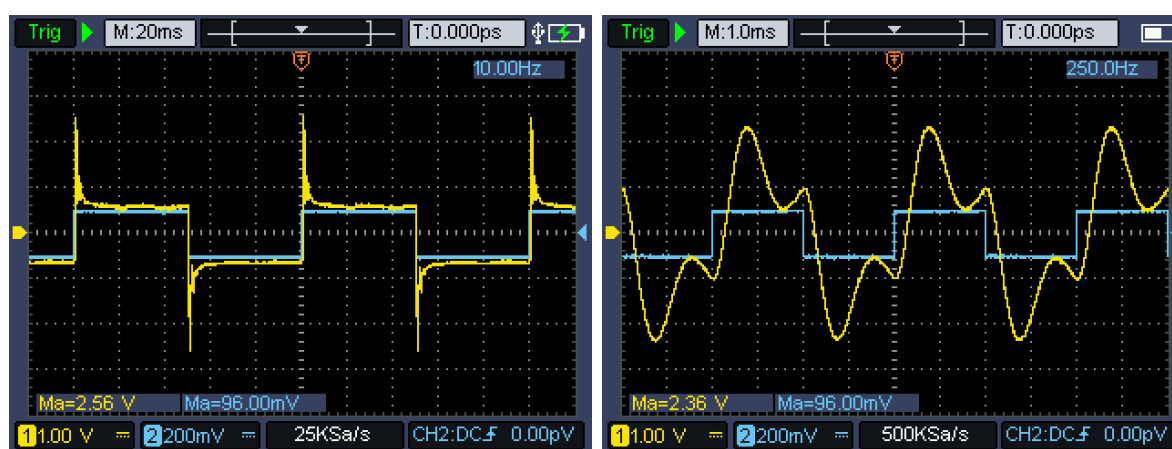
(c) Salida para señal senoidal de 10 kHz

Figura 28: Respuesta a señales senoidales de la placa

De manera similar a lo realizado para señales senoidales, se verificó la respuesta del circuito a señales cuadradas utilizando el generador de señales para generar las mismas señales que las analizadas con los métodos numéricos. Las 3 señales cuadradas generadas son de amplitud pico 100 mV y frecuencias 10 Hz, 250 Hz y 2500 Hz

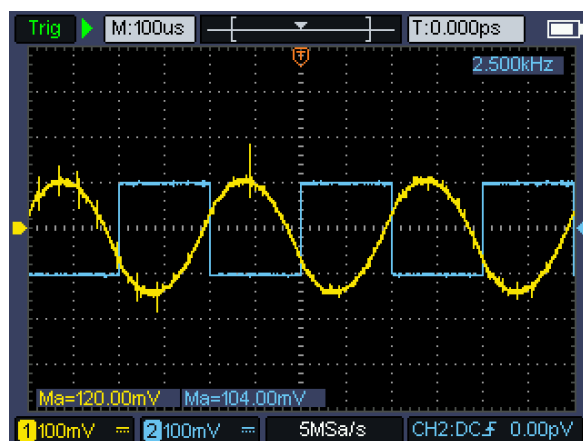
En la figura 29 se muestran las señales cuadradas generadas y las respuestas medidas de la placa ante esas señales. En primer lugar en la figura 29a se tiene la respuesta de la placa ante una señal cuadrada de 10 Hz, se puede ver que es comparable a la respuesta obtenida de manera numérica de la figura 21 dado

que se tiene un sobrepico con una duración de aproximadamente 6 ms y luego una ganancia de aproximadamente 6 veces. Para la señal cuadrada de 250 Hz la respuesta de la placa se muestra en la figura 29b y tiene una forma similar a la respuesta obtenida mediante métodos numéricos de la figura 22, en particular, la forma es más parecida a la forma de la respuesta del circuito simulado que a la respuesta de la transferencia en sí, con el pico mayor en aproximadamente 2 V y el pico menor cercano a 1 V. Para la respuesta del circuito a la señal cuadrada de 2500 Hz de la figura 29c, se tiene que no hay una relación entre la respuesta obtenida de la placa y la obtenida mediante métodos numéricos que se muestra en la figura 23.



(a) Salida para señal cuadrada de 10 Hz

(b) Salida para señal cuadrada de 250 Hz

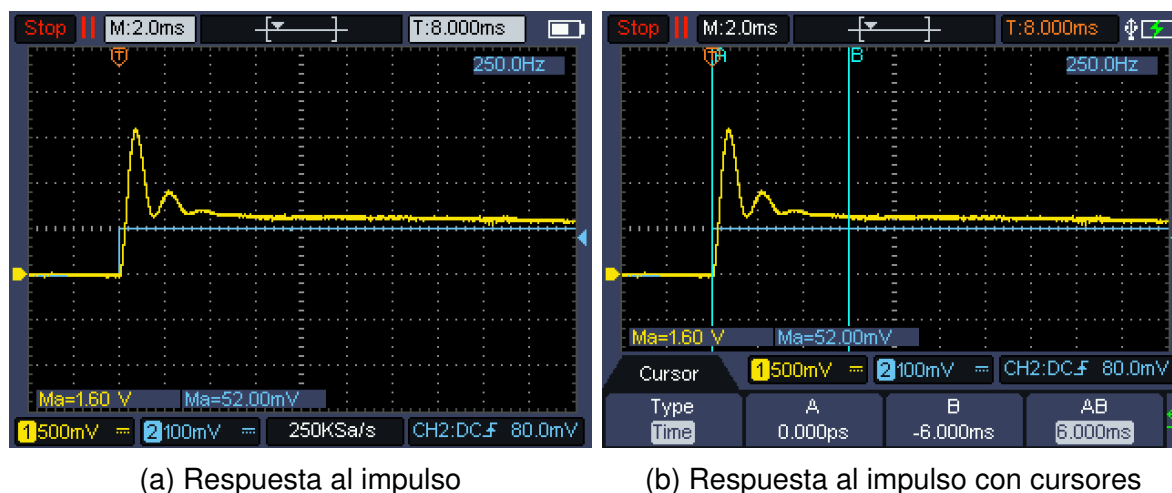


(c) Salida para señal cuadrada de 2500 Hz

Figura 29: Respuesta a señales cuadradas de la placa

Por último se analiza la respuesta al escalón del circuito, para esto se genera una señal cuadrada con amplitud 50 mV y componente continua de 50 mV, con un período muy grande. El resultado, junto con la respuesta del circuito ante esta entrada, se muestra en la figura 30a. En la figura, se observa el comportamiento subamortiguado-

do del circuito, y se puede ver que la amplitud del primer pico es aproximadamente 16 veces la amplitud del escalón, este valor es el mismo que el valor de la amplitud de la respuesta al escalón de la transferencia normalizada que se puede ver en la figura 15, pero no es igual a la amplitud del primer pico del circuito simulado que se puede ver en la misma figura, el cual resulta de aproximadamente 18,5 veces. Haciendo uso de los cursores del osciloscopio se mide el tiempo característico tal como se muestra en la figura 30b, con lo cual se obtiene aproximadamente 6 ms, lo que se condice con las respuestas obtenidas de manera analítica y numérica.



(a) Respuesta al impulso

(b) Respuesta al impulso con cursores

Figura 30: Respuesta al escalón de la placa

Para obtener la respuesta en frecuencia de la placa y comparar así con la respuesta en frecuencia de la transferencia asignada y normalizada, se utilizó el estándar de comandos SCPI (Standard Commands for Programmable Instruments) del osciloscopio y generador utilizado.¹² Sabiendo los comandos, se creó un script de Python el cual itera sobre una lista de frecuencias de longitud arbitraria distribuidas logarítmicamente. Para cada frecuencia de la lista, se genera una señal senoidal con amplitud pico de 100 mV; si la frecuencia es menor a 1 kHz, o 1 V, si la frecuencia es mayor a 1 kHz, y para cada frecuencia se mide la amplitud de la señal de salida de la placa mediante el canal 1 del osciloscopio, dividiendo por la amplitud pico de la señal de entrada para normalizar el valor entre -1 y 1. El resultado del script es una lista de valores separados por coma, los cuales son utilizados como entrada de un script de Octave que genera una gráfica de la magnitud en escala de decibels en función de la frecuencia, con la frecuencia en escala logarítmica.

La respuesta en frecuencia de la placa obtenida, con una lista de 300 frecuencias diferentes ordenadas logarítmicamente y realizando un promedio móvil de 2 muestras

¹²El estándar se encuentra disponible en la pagina web del fabricante. OWON Technology Inc, s.f.-a

de las magnitudes medidas, se puede ver en la figura 31, en la cual se aprecia la similar respuesta entre la placa y las transferencias original y normalizada. Se puede ver que para frecuencias menores a 5 kHz (aproximadamente 31000 rad/s), ambas transferencias y la placa se corresponden muy bien, y para frecuencias mayores a dicha frecuencia comienza a haber una diferencia, esto último se atribuye principalmente a errores en las mediciones producto de una señal de salida muy débil (dada la atenuación).

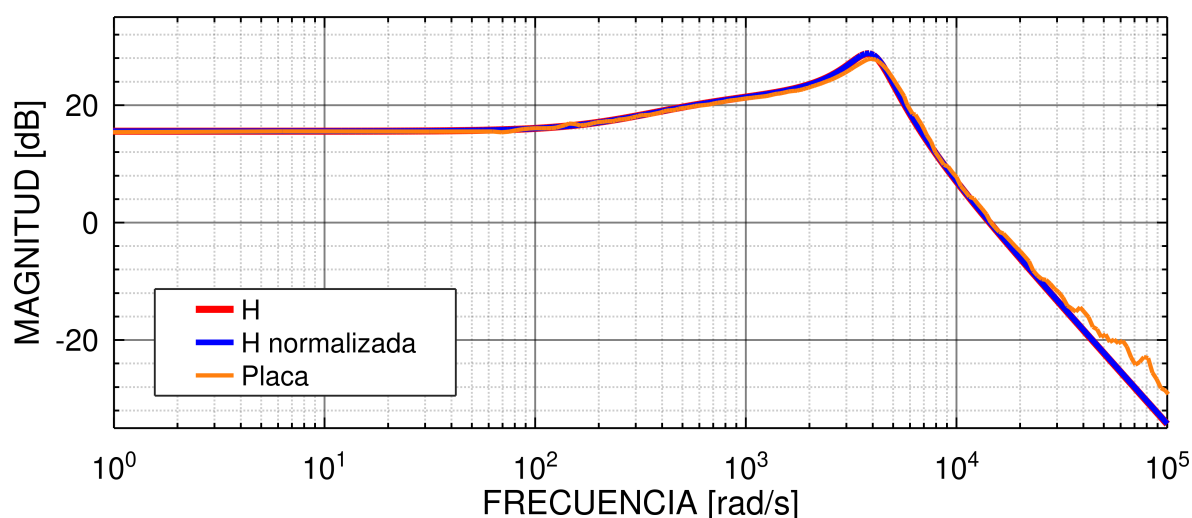


Figura 31: Diagrama de Bode de transferencias y placa

En la tabla 3 se comparan los valores de ganancia en decibelios de la transferencia original y los valores medidos de la placa, además se calcula el error porcentual, el cual para frecuencias menores a 25 krad/s (aproximadamente 4 kHz) se encuentra por debajo de 5%.

Frecuencia [rad/s]	H [dB]	Placa [dB]	Error [%]
20	15,6	15,5	0,64
253	17,7	17,6	0,56
639	20,3	20,0	1,48
1015	21,4	21,2	0,93
2915	26,4	25,4	3,79
10722	5,6	5,8	3,57
24770	-9,9	-9,3	6,06

Tabla 3: Error porcentual entre la ganancia de la transferencia original y la placa

6. Conclusión

El presente trabajo permitió validar los diferentes métodos de análisis y síntesis utilizados, partiendo de una transferencia desconocida y aplicando métodos analíticos, numéricos y experimentales para su caracterización. De este modo, se verificó que los resultados obtenidos mediante los distintos métodos son consistentes entre sí, dentro de un margen de error aceptable.

En general, se obtuvo un resultado muy bueno, verificándose que el circuito implementado reproduce adecuadamente el comportamiento de la función de transferencia asignada, con un error en la respuesta en frecuencia menor a 5% para frecuencias inferiores a 25 krad/s (aproximadamente 4 kHz). Para frecuencias superiores a ese valor, el incremento del error se atribuye principalmente a errores de medición, dado que se tiene una señal muy débil a medir (producto de la fuerte atenuación del circuito). Sin embargo, se puede concluir que el comportamiento observado coincide con el esperado, ya que en ambos casos se verifica una fuerte atenuación de la señal.

Referencias

- Alan V. Oppenheim, A. S. W. (1997). *Señales y Sistemas* (2da. Edición). Prentice Educación.
- OWON Technology Inc. (s.f.-a). *HDS200 Series*. Consultado el 9 de agosto de 2026, desde https://www.owon.com.hk/products_owon_hds200_series_digital_oscilloscope
- OWON Technology Inc. (s.f.-b). *SCPI Protocol for HDS200 Series Oscilloscope*. Consultado el 9 de agosto de 2026, desde https://files.owon.com.cn/software/Application/HDS200_Series_SCPI_Protocol.pdf
- Rolf Schaumann, M. E. V. V. (2001). *Design of Analog Filters* (1ra. Edición). Oxford University Press.
- Sadiku, M. N. O. (2015). *Fundamentos de Circuitos Electrónicos* (5ta. Edición). McGraw-Hill.